UNIVERSITÉ NICE - SOPHIA ANTIPOLIS - UFR SCIENCES

ECOLE DOCTORALE DES SCIENCES FONDAMENTALES
ET APPLIQUÉES

LABORATOIRE J. A. DIEUDONNÉ

Doctorat de Mathématiques Fondamentales.

Auteur : Julien Aurouet

Normalisation de champs de vecteurs holomorphes et équations différentielles implicites

---

Rapporteurs :

Marc CHAPERON (Université Paris 7)

Raphaël KRIKORIAN (Université Paris 6)

Thèse de doctorat soutenue le 6 décembre 2013 devant le jury composé de :

Marc CHAPERON (Université Paris 7)	**Rapporteur**
Tien Cuong DINH (Université Paris 6)	**Examinateur**
Jean-Marc GAMBAUDO (Université de Nice)	**Examinateur**
Raphaël KRIKORIAN (Université Paris 6)	**Rapporteur**
Laurent STOLOVITCH (Université de Nice)	**Directeur de thèse**

Normalisation de champs de vecteurs holomorphes et équations différentielles implicites.

Résumé :

La théorie classique des formes normales a pour but de simplifier des problèmes compliqués grâce à des changements de coordonnées réguliers pour ne conserver que les caractéristiques dynamiques du système. Plus précisément, on considère un système dynamique que l'on dit "élémentaire", comme par exemple la partie linéaire d'un champ de vecteurs au voisinage d'un point singulier, et on se donne une perturbation de ce système élémentaire. Les formes normales sont alors l'ensemble des représentants de ces perturbations à la conjugaison près d'une transformation régulière. Elles ne sont constituées que des termes qui caractérisent la dynamique du système perturbé et que l'on appelle "résonances".

Dans la première partie de la thèse on cherche à comprendre la dynamique locale d'équations différentielles implicites de la forme $F(x, y, dy) = 0$, où F est un germe de fonction sur $\mathbb{K}^n \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}^{n*}$ (où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), au voisinage d'un point singulier. Pour cela on utilise la relation intime entre les systèmes implicites et les champs liouvilliens. La classification par transformation de contact des équations implicites provient de la classification symplectique des champs liouvilliens. On utilise alors toute la théorie des formes normales pour les champs de vecteurs, dans le cas holomorphe (Brjuno, Siegel, Stolovitch) et dans le cas réel (Sternberg), que l'on adapte pour les champs liouviliens avec des transformations symplectiques. On établit alors des résultats de classification des équations implicites en fonction des invariants dynamiques, ainsi que des conditions d'existence de solutions locales via les formes normales.

Dans la deuxième partie de la thèse, on s'intéresse à la normalisation d'un champ de vecteurs holomorphe au voisinage d'un tore invariant. Les composantes du champ de vecteurs sont définies sur un domaine $D \subset (\mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z})^l \times \mathbb{C}^n$ qui contient le tore $\mathcal{T}^l := (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^l \times \{0_{\mathbb{C}^n}\}$. Brjuno énonce un théorème de normalisation, sous des conditions de contrôle des petits diviseurs et d'intégrabilité de ses formes normales ; il ne donne cependant pas de preuve de ce théorème. On donnera une preuve d'un théorème similaire de linéarisation sur le tore invariant, sous une hypothèse légèrement plus forte. La démonstration utilise un procédé d'itération pour linéariser successivement quasi-degré par quasi-degré. L'achèvement de la preuve passe par l'estimation de générateurs infinitésimaux à coefficients fonctionnels analytiques et 2π-périodiques. Ces estimations nécessitent un contrôle des hautes fréquences pour pallier la dimension infinie de ces espaces de fonctions.

Mots-clés : Formes normales. Équations différentielles implicites. Champs de vecteurs analytiques. Champs de vecteurs liouvilliens et hamiltoniens. Petits diviseurs.

Normalization of holomorphic vector fields and implicit differential equations.

Abstract : The aim of the classical theory of normal forms is to simplify complicated problems by using regular changes of coordinates, in order to keep the dynamical characteristics of the system. More precisely, we consider a dynamic system said to be "elementary", like a linear part of a vector field in the neighborhood of a singular point, and we focus on a perturbation of this elementary system. Normal forms are the set of all representatives of those perturbations under the action of the group of regular transformation. They are composed of terms which caracterise the dynamics of the perturbed system, and which are called "resonances".

In the first part, we try to understand the local dynamic of implicit equations of the form $F(x, y, dy) = 0$, where F is a germ of function on $\mathbb{K}^n \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}^{n*}$ (where $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$), in a neighborhood of a singular point. To this end we use the relation between implicit systems and liouvillian vector fields. The classification by contact transformations of implicit equations come from the symplectic classification of liouvillian vector fields. We use all normal forms theory for vector fields, in complex case (Bjruno, Siegel, Stolovitch), and in real case (Sternberg), adapted to liouvillian fields with symplectic transformations. We establish classification results for implicit equations according to the dynamical invariants, and existence conditions of local solutions using normal forms.

In the second part, we undertake the normalization of an analytic vector field in a neighborhood of the torus. All the components of the vector field are defined on a open set $D \subset (\mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z})^l \times \mathbb{C}^n$ which contains the torus $\mathcal{T}^l := (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^l \times \{0_{\mathbb{C}^n}\}$. Brjuno enunciates a theorem of normalization, under conditions of control of small divisors and integrability of the normal forms; however he doesn't give any proof of that theorem. We give a proof of a similar theorem of linearisation on the invariant torus, under a slightly stronger assumption. The proof uses an iteration method in order to linearized quasi-degree by quasi-degree. The achievement of the proof needs to estimate infinitesimal generators with analytical and 2π-periodic fonctional coefficients. Those estimations need a control of hight frequencies to compensate the infinite dimension of those spaces of fonctions.

Keywords : Normal forms. Implicit differential equations. Analytic vector fields. Liouvilian and hamiltonian vector fields. Small divisors.

Remerciements

Je voudrais tout d'abord remercier chaleureusement Laurent, mon directeur de thèse, qui a toujours su me donner de précieux conseils, ses indications se sont toujours avérées judicieuses, malgré la complexité du paysage et les surprises rencontrées.

Je remercie sincèrement Marc Chaperon et Ivar Ekeland, pour leur aide et pour l'attention qu'ils ont portée envers mon travail.

Par ailleurs je remercie ma famille, plus précisément ma conjointe et mes parents pour leur soutien, ainsi que mes amis, particulièrement François-Xavier mon frère en mathématiques.

Merci à tous les membres du laboratoire Dieudonné, pour leur accueil et les agréables conditions de travail. Merci à tous les thésards du laboratoire, pour les bons moments passés ensembles. Camilo, Camille, Carole, Claire, Damien, Jean-Baptiste, Julianna, Hugo, Marie, Mathieu (les deux), Mélisande, Nancy, Olivia, Paul-Éric, Pauline et Salima, je vous dis un grand merci, ainsi qu'à ceux que j'aurais oubliés.

Ma dernière et plus reconnaissante pensée va vers Amine Ilmane, pour tous les bons moments et pour les innombrables conversations scientifiques et culturelles, diverses et enrichissantes, que nous avons pues avoir autour d'un café.

Merci.

Table des matières

Première partie

Dynamique et formes normales d'équations différentielles implicites

Introduction

On se donne une équation différentielle :

$$F(x, y, y') = 0 \tag{1}$$

où F est une fonction holomorphe de trois variables complexes. On s'intéresse au cas non résoluble par rapport à y', c'est à dire au voisinage d'un point p de $\mathbb{C}^3$ où la dérivée de F par rapport la troisième variable s'annule. On note S la surface de $\mathbb{C}^3$ d'équation $F(x, y, z) = 0$ et Γ l'ensemble des points p de $\mathbb{C}^3$ tels que $F(p) = \frac{\partial F}{\partial z}(p) = 0$. On cherche alors à résoudre l'équation (1), c'est à dire trouver des fonctions f holomorphes au voisinage d'un point p de Γ, telles que la fonction :

$$x \mapsto F(x, f(x), f'(x))$$

soit identiquement nulle au voisinage de p.

L'idée classique est de remplacer la valeur y' par la troisième coordonnée z et d'ajouter une contrainte sur celle-ci (méthode de Lie). L'équation est alors équivalente au système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} F(x, y, z) = 0 \\ dy - z \cdot dx = 0 \end{array} \right. \tag{2}$$

L'espace $\mathbb{C}^3$ est alors muni d'une structure de contact définie par la forme différentielle :

$$\Omega = dy - zdx.$$

On a donc en chaque point p de S un plan de contact défini par l'équation $\Omega(p) = 0$; ces plans de contact sont tous "verticaux", c'est dire qu'il contiennent tous la troisième direction d'axe Oz. Les 1-jets des solutions de (1) sont donc les feuilles de l'équation :

$$\Omega|_S = 0$$

On appelle ce feuilletage, *le feuillage caractéristique* de l'équation (1).

Il y a alors deux types de singularité qui apparaissent : Si p appartient à $S \setminus \Gamma$ alors le plan tangent à S en p est transverse au plan de contact défini par l'équation $\Omega(p) = 0$. En revanche si p appartient à Γ, ces deux plans peuvent être transverses ou confondus. Dans le cas transverse on dira alors que p est *un point singulier à tangent transverse* (ou point singulier régulier), et dans l'autre cas on dira que p est *un point singulier à tangent non-transverse.*

Dire qu'un point $p = (x_p, y_p, z_p)$ est singulier à tangent non-transverse revient à dire que :

$$\Omega(p) \wedge dF(p) = 0$$

Autrement dit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial z}(p) = 0 \\ \\ \frac{\partial F}{\partial x}(p) + z_p \frac{\partial F}{\partial y}(p) = 0 \end{array} \right. \tag{3}$$

Dans le cas où $\frac{\partial^2 F}{\partial p^2}(p) \neq 0$, p est alors un point pli. Dans [Dar75], des modèles locaux dans le cas réel pour ces points plis singuliers sont présentés :

$$Y'^2 = X, \qquad \text{(Point pli singulier régulier)}$$

$$Y'^2 = Y, \qquad \text{(Point pli de Clairaut)}$$

Nous allons nous intéresser à l'étude de l'équation (1) au voisinage d'un point pli singulier à tangent non-transverse de $\mathbb{C}^3$ noté $p = (x_p, y_p, z_p)$, lorsque p n'est pas un point critique de F.

On utilisera des modèles d'équations implicites élémentaires pour établir des résultats de classification, en fonction d'un invariant dynamique que l'on déterminera. Puis on s'intéressera au problème en dimension supérieure de la forme $F(x_1, ..., x_n, y, \frac{\partial y}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial y}{\partial x_n}) = 0$, où F est une fonction de $\mathbb{C}^{2n+1}$. Et enfin, on utilisera les résultats obtenues et l'étude des solutions des équations modèles pour comprendre la dynamique locale, dans le cas complexe puis dans le cas réel.

La théorie classique des formes normales a pour but de classifier des systèmes dynamiques tels que des champs de vecteurs, ou comme nous le verrons, des équations différentielles implicites. Dans cet article, nous ne chercherons pas à étudier la "dynamique" à proprement dite des solutions, en revanche les résultats de classification permettront de transporter les propriétés dynamiques des formes normales sur toutes leurs classes d'équivalence.

En effet, si d'un côté nous sommes capables de normaliser un système par une transformation lisse, et de l'autre nous comprenons la dynamique de la forme normale, qui en général est plus simple à étudier, alors nous pouvons comprendre la dynamique du système initial ainsi que de n'importe quel autre système analytiquement équivalent.

Nous parlerons donc de dynamique en ce sens.

Notations

Pour tout champs de vecteur X, on notera $\mathcal{L}_X$ la dérivée de Lie par rapport à X.

Pour tout champ de vecteurs $X = \sum_{k=1}^n X_k \frac{\partial}{\partial x_k}$ et $Y = \sum_{k=1}^n Y_k \frac{\partial}{\partial x_k}$ leur crochet de Lie est égal à :

$$[X, Y] = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n X_j \frac{\partial Y_i}{\partial x_j} - Y_j \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Pour toutes fonctions f et g des variables $(x_i, z_i)_{1 \leq i \leq n}$ le crochet de poisson de f et g est égale à :

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_i} \frac{\partial g}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial z_i}$$

Avec ces notations, on considère les champs hamiltoniens pour la forme $dx \wedge dz$, des fonctions f et g : $H_f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_i} \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial z_i}$ et $H_g = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial z_i} \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial z_i}$ Et dans ce cas leur crochet de lie est égale à

$$[H_f, H_g] = H_{\{f,g\}}.$$

Formule de Cartan : Pour tout champ de vecteur X on a :

$$\mathcal{L}_X = i_X d + d i_X$$

Soient X un champ de vecteur et ω une forme différentielle. Soit Φ un difféomorphisme. On note alors :

$$\Phi^* X = d\Phi^{-1} \circ X \circ \Phi \quad \text{et} \quad \Phi_* X = (\Phi^{-1})^* X$$

$$\text{puis} \qquad (\Phi^* \omega)_x = \omega_{\Phi(x)}(d_x \Phi)$$

Soient X et Y deux champs de vecteurs, f une fonction, ω une forme différentielle et φ un difféomorphisme. On alors alors les formules suivantes :

$$[X, fY] = f[X, Y] + \mathcal{L}_X(f) Y.$$

$$\mathcal{L}_{fX} \omega = f \mathcal{L}_X \omega + (\mathcal{L}_X f)\, \omega.$$

$$\varphi^*(\mathcal{L}_X \omega) = \mathcal{L}_{\varphi^* X}(\varphi^* \omega)$$

1 Des équations différentielles implicites aux champs liouvilliens :

1.1 Forme canonique :

Equivalence des équations différentielles : Deux germes d'équations différentielles

$$E_1 : F_1(x,y,y') = 0 \quad \text{et} \quad E_2 : F_2(X,Y,Y') = 0$$

sont équivalents (respectivement, formellement équivalents) s'il existe un germe de biholomorphisme (respectivement, un difféomorphisme formel) $\varphi(x,y,z) = (X,Y,Z)$ de $\mathbb{C}^3$ qui envoie le germe de surface $S_1 : F_1(x,y,z) = 0$ sur le germe de surface $S_2 : F_2(X,Y,Z) = 0$ et qui préserve la structure de contact, c'est à dire tel que $(dY - ZdX) \wedge (dy - zdx) = 0$. Lorsque l'équivalence est biholomorphe on écrira :

$$E_1 \sim E_2.$$

D'un autre côté, on dira que les feuilletages caractéristiques de E_1 et E_2 sont équivalents, s'il existe un germe de biholomorphisme qui envoie S_1 sur S_2 et qui envoie le feuilletage caractéristique de E_1 sur celui de E_2.

Exemple : La transformation de Legendre

$$(x,y,z) \mapsto (-z, y - xz, x)$$

Cette transformation de contact permet d'échanger x et z dans l'équation.

Exemple : On considère le changement de variable suivant :

$$(x,y,z) \mapsto (x - x_p, y - y_p - z_p(x - x_p), z - z_p)$$

C'est une transformation de contact qui change p en zéro.

On peut donc se ramener au cas où le point pli singulier que l'on étudie est 0. Dans ce cas les équations (3) deviennent :

$$\frac{\partial F}{\partial x}(0) = \frac{\partial F}{\partial z}(0) = 0 \ \text{ ainsi } \ \frac{\partial F}{\partial y}(0) \neq 0 \tag{4}$$

car 0 n'est pas un point critique de F. Alors, d'après le théorème des fonctions implicites, il existe une fonction g de $\mathbb{C}^2$ holomorphe au voisinage de 0 et telle que l'équation de départ (1) soit équivalente à :

$$y = g(x,y') \tag{5}$$

ou encore à :

$$\begin{cases} y = g(x,z) \\ dy - zdx = 0 \end{cases} \tag{6}$$

D'après les équations (4), g est une fonction d'ordre 2.

1.2 Réduction à un système à deux coordonnées :

Avec l'écriture (6) on peut se ramener à un système à deux coordonnées équivalent : on choisit x et z comme système de coordonnées locales sur S. La forme de contact devient alors :

$$\Omega = dy - zdx = \left(\frac{\partial g}{\partial x} - z\right) dx + \left(\frac{\partial g}{\partial z}\right) dz$$

On considère alors le champ de vecteur suivant :

$$X = \left(\frac{\partial g}{\partial z}\right) \frac{\partial}{\partial x} + \left(z - \frac{\partial g}{\partial x}\right) \frac{\partial}{\partial z}$$

Ce champ caractérise le feuilletage de la forme de contact : Les courbes intégrales de ce champ, ramenées sur S par la carte donnée par $(x, z) \mapsto (x, g(x, z), z)$, donnent exactement le feuilletage caractéristique de l'équation. Les solutions recherchées sont alors les projections sur le plan des x et y du feuilletage caractéristique.

Ainsi, pour comprendre la dynamique en 0 de l'équation (5) il faut comprendre celle du champ X qui lui est associée.

1.3 Structure symplectique :

Définition : On note $\omega := dz \wedge dx$ la forme symplectique standard de $\mathbb{C}^2$. On dit qu'un champ de vecteurs analytique V est *liouvillien* si $\mathcal{L}_V \omega = \omega$.

On remarque alors que la différence de deux champs de vecteurs liouvilliens est un champ hamiltonien.

Le champ de vecteurs X défini précédemment, est la somme du champ de vecteurs hamiltonien $H_g = \left(\frac{\partial g}{\partial z}\right) \frac{\partial}{\partial x} + \left(-\frac{\partial g}{\partial x}\right) \frac{\partial}{\partial z}$ et du champ $S_0 = z\frac{\partial}{\partial z}$, qui est liouvillien. Comme H_g est hamiltonien, on a $\mathcal{L}_{H_g} \omega = 0$, par conséquent X est un champ de vecteur liouvillien.

La proposition suivante est une adaptation d'un résultat de Manouchehri dans le cadre holomorphe. [Man96]

Proposition 1. *On considère deux germes d'équations :*

$$\begin{array}{ccc} (E_1) \quad : \quad y = g_1(x, y') & & (E_2) \quad : \quad Y = g_2(X, Y') \\ \textit{ou} & \textit{et} & \textit{ou} \\ \left\{ \begin{array}{l} S_1 : y = g_1(x, z) \\ dy - zdx = 0 \end{array} \right. & & \left\{ \begin{array}{l} S_2 : Y = g_2(X, Z) \\ dY - ZdX = 0 \end{array} \right. \end{array}$$

dont on déduit les germes de champs de vecteurs liouvilliens X_1 et X_2 correspondants.

Soit Φ un germe de biholomorphisme de $\mathbb{C}^3$ qui envoie le germe de surface $(S_1, 0)$ sur le germe de surface $(S_2, 0)$ et qui préserve la forme de contact Ω. Alors $\varphi := \pi_* \Phi|_{S_1}$ (avec $\pi : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2$, $(x, y, z) \mapsto (x, z)$) est un germe de biholomorphisme symplectique de $(\mathbb{C}^2, 0)$ qui envoie X_1 sur X_2.

Réciproquement, tout germe de difféomorphisme symplectique φ de $(\mathbb{C}^2, 0)$ qui envoie le champ X_1 sur le champ X_2 se relève par π en un unique germe de difféomorphisme Φ de $\mathbb{C}^3$ qui non seulement envoie $(S_1, 0)$ sur $(S_2, 0)$ mais aussi qui préserve la forme de contact Ω.

Et dans ce cas, on a :

$$(E_1) \sim (E_2)$$

Preuve : La démonstration est analogue à [Man96]. Comme le germe Φ : $(x, y, z) \mapsto (X, Y, Z)$ préserve Ω, on a :

$$\Phi_*(dy - zdx) = dY - ZdX$$

donc si on applique la différentielle extérieure on obtient :

$$\Phi_*(-dz \wedge dx) = -dZ \wedge dX.$$

Donc φ est bien symplectique.

De plus, comme Φ envoie S_1 sur S_2 :

$$\Phi|_{S_1 *}(dy - zdx|_{S_1}) = dY - ZdX|_{S_2}$$

or sur S_1 : $dy = \frac{\partial g_1}{\partial x}dx + \frac{\partial g_1}{\partial z}dz$ et sur S_2 : $dY = \frac{\partial g_2}{\partial X}dX + \frac{\partial g_2}{\partial Z}dZ$, donc

$$\varphi_* \left(\left(\frac{\partial g_1}{\partial x} - z \right) dx + \frac{\partial g_1}{\partial z} dz \right) = \left(\frac{\partial g_2}{\partial X} - Z \right) dX + \frac{\partial g_2}{\partial Z} dZ$$

ce qui s'écrit également :

$$\varphi_*(i_{X_{g_1}}(dx \wedge dz)) = i_{X_{g_2}}(dX \wedge dZ)$$

or :

$$\varphi_*(i_{X_{g_1}}(dx \wedge dz)) = i_{\varphi_*(X_{g_1})}(\varphi_*(dx \wedge dz)) = i_{\varphi_*(X_{g_1})}(dX \wedge dZ)$$

car φ est symplectique. De plus, $dX \wedge dZ$ est une 2-forme non dégénérée donc on en déduit que :

$$\varphi_*(X_{g_1}) = X_{g_2}$$

Réciproquement : Soit φ un germe de difféomorphisme symplectique de $\mathbb{C}^2$ tel que $\varphi_*(X_{g_1}) = X_{g_2}$. On note, $X(x, z)$ et $Z(x, z)$ les deux composantes de φ. Comme φ est symplectique, on a alors : $dx \wedge dz = dX \wedge dZ$. Ou encore : $d(ZdX - zdx) = 0$. D'après le lemme de Poincaré, il existe une unique fonction h nulle en zéro telle que : $ZdX - zdx = dh$. On construit alors Φ en prenant comme composantes (X, Y, Z), où X et Z sont les mêmes que les composantes de φ et $Y(x, y, z) = y + h(x, z)$. Il en résulte que : $dY - ZdX = dy - zdx$.

Et de même, si $\varphi_* X_{g_1} = X_{g_2}$ alors :

$$\varphi_* \left(\left(\frac{\partial g_1}{\partial x} - z \right) dx + \frac{\partial g_1}{\partial z} dz \right) = \left(\frac{\partial g_2}{\partial X} - Z \right) dX + \frac{\partial g_2}{\partial Z} dZ$$

$$\text{ou encore } \; \Phi_* \left(dg_1 - dy \right) = dg_2 - dY, \iff \Phi_* S_1 = S_2.$$

2 Normalisation :

Introduction : Soit X un germe de champ de vecteurs holomorphe, on note S sa partie linéaire. On dit que X est analytiquement normalisable s'il existe un changement de coordonnées local biholomorphe φ tangent à l'identité en 0 tel que $\varphi^*X = S + N$, où N est un champ de vecteurs qui commute avec S, soit $[S, N] = 0$. Sous cette condition on dit que $NF := S + N$ est une forme normale.

Pour plus de détails sur la théorie classique des formes normales de champs de vecteurs holomorphes, le lecteur pourra se référer à [Arn80] ou [Sto].

D'après la proposition 1, si on pouvait normaliser holomorphiquement et symplectiquement le champ de Liouville X associé à l'équation (5), il suffirait de prendre l'équation différentielle implicite associée au champ de vecteurs normalisé pour obtenir un modèle local d'équation différentielle implicite, autrement dit une "forme normale", et de dynamique équivalente à celle de l'équation (5).

2.1 Équations différentielles implicites élémentaires :

On considère l'équation différentielle d'ordre 2 suivante :

$$y = \alpha y'^2 + \beta x y' + \gamma x^2$$

On applique le changement de variable suivant lorsque $\alpha \neq 0$:

$$\varphi_{\alpha,\beta,\gamma} : \begin{cases} X = \frac{1}{2\alpha} \cdot x \\ Y = \frac{1}{2\alpha} \cdot y + \frac{\beta}{8\alpha^2} \cdot x^2 \end{cases}$$

$$\text{alors} \quad Y' = \frac{dY}{dX} = y' + \frac{\beta}{2\alpha} \cdot x$$

On vérifie qu'avec $Z = z + \frac{\beta}{2\alpha} \cdot x$, le changement de variable est bien valide :

$$dY - ZdX = \frac{1}{2\alpha} dy + \frac{\beta}{4\alpha^2} x dx - (z + \frac{\beta}{2\alpha} x) \frac{1}{2\alpha} dx = \frac{1}{2\alpha}(dy - zdx)$$

$$\text{donc} \quad (dY - ZdX) \wedge (dy - zdx) = 0$$

Et on obtient l'équation suivante :

$$Y = \frac{1}{2}(Y'^2 + \chi X^2) \tag{7}$$

avec $\chi = \beta(1-\beta) + 4\alpha\gamma$.

En effet :

$$\frac{1}{2}(Z^2 + \chi X^2) - Y = \frac{1}{2}(z^2 + \frac{\beta}{\alpha} zx + \frac{\beta^2}{4\alpha^2} x^2 + \frac{\chi}{4\alpha^2} x^2) - \frac{1}{2\alpha} y - \frac{\beta}{8\alpha^2} x^2$$

$$= \frac{1}{2} z^2 + \frac{\beta}{2\alpha} xz + \frac{\beta^2}{8\alpha^2} x^2 + \frac{\chi}{8\alpha^2} x^2 - (\frac{1}{2} z^2 + \frac{\beta}{2\alpha} xz + \frac{\gamma}{2\alpha} x^2) - \frac{\beta}{8\alpha^2} x^2$$

$$= \frac{(\chi - (\beta(1-\beta) + 4\alpha\gamma))}{8\alpha^2} x^2 = 0$$

Si on applique à (7) la transformation de Legendre, puis un changement de variable $\varphi_{\alpha,\beta,\gamma}$ avec $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = 1$ et $\gamma = \frac{\chi}{2}$, on obtient la même équation que (7) mais avec X et Y' échangés, pour la même valeur de χ.

Dans le cas où $\alpha = 0$ mais $\gamma \neq 0$ on pourra se ramener au cas précédent ($\alpha \neq 0$) en utilisant la transformation de Legendre.

Si $\alpha = \gamma = 0$, on applique la transformation suivante, où $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{\frac{1}{2}\}$:

$$\Psi_\lambda : \begin{cases} X = \frac{1}{1-2\lambda} \cdot x + z \\ Y = y + \frac{\lambda}{2(1-2\lambda)^2} \cdot x^2 + \frac{\lambda}{1-2\lambda} \cdot xz + \frac{1-\lambda}{2} \cdot z^2 \\ Z = \frac{\lambda}{1-2\lambda} \cdot x + (1-\lambda) \cdot z \end{cases}$$

C'est bien une transformation de contact :

$$\begin{aligned} dY - ZdX = dy &+ \frac{\lambda}{(1-2\lambda)^2} xdx + \frac{\lambda}{1-2\lambda} zdx + \frac{\lambda}{1-2\lambda} xdz + (1-\lambda)zdz \\ &- \frac{\lambda}{(1-2\lambda)^2} xdx - \frac{(1-\lambda)}{(1-2\lambda)} zdx - \frac{\lambda}{1-2\lambda} xdz - (1-\lambda)zdz \\ &= dy - zdx \end{aligned}$$

Et elle envoie l'équation :

$$y = \lambda x y' \tag{8}$$

sur l'équation (7), avec $\chi = \lambda(1-\lambda)$. En effet :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}(Z^2 + \chi X^2) - Y = \\ &\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda^2}{(1-2\lambda)^2} x^2 + \frac{2\lambda(1-\lambda)}{(1-2\lambda)} xz + (1-\lambda)^2 z^2 + \frac{\chi}{(1-2\lambda)^2} x^2 + \frac{2\chi}{1-2\lambda} xz + \chi z^2\right) \\ &\qquad -y - \frac{\lambda}{2(1-2\lambda)^2} x^2 - \frac{\lambda}{1-2\lambda} xz - \frac{(1-\lambda)^2}{2} z^2 \\ &= x^2 \underbrace{\left(\frac{\lambda^2 + \chi - \lambda}{2(1-2\lambda)^2}\right)}_{=0} + xz \underbrace{\left(\frac{\lambda(1-\lambda) + \chi - \lambda}{1-2\lambda}\right)}_{=\lambda} + z^2 \underbrace{\left(\frac{(1-\lambda)^2 + \chi - (1-\lambda)}{2}\right)}_{=0} - y \\ &= \lambda xz - y = 0 \end{aligned}$$

Les rôles de λ et $1-\lambda$ sont échangeables via une transformation de Legendre et laissent toujours χ inchangé.

Champs de vecteurs liouvilliens correspondants : Le champ liouvillien associé à l'équation (7) est :

$$X = z\frac{\partial}{\partial x} + (z - \chi x)\frac{\partial}{\partial z}.$$

Ce champ de vecteur linéaire se diagonalise pour $\chi \neq \frac{1}{4}$ ($\lambda \neq \frac{1}{2}$) en le champ de vecteurs :

$$S = \lambda x \frac{\partial}{\partial x} + (1-\lambda) z \frac{\partial}{\partial z}$$

qui est le champ de vecteurs liouvillien associé à l'équation (8). Il est même possible de faire cette diagonalisation à l'aide d'une transformation linéaire symplectique. Désormais, S désignera systématiquement ce champ de vecteurs diagonal.

Solutions : Dara traite les différents cas réels de l'invariant χ (voir [Dar75]) pour étudier les solutions de l'équation $y = \frac{1}{2}(y'^2 + \chi x^2)$ au voisinage d'un point (x_0, y_0). Dans le cas complexe, l'étude est similaire : on cherche les courbes intégrales de son champ liouvillien associé $X = z\frac{\partial}{\partial x} + (z - \chi x)\frac{\partial}{\partial z}$ au voisinage d'un point (x_0, z_0) de sorte que $y_0 = \frac{1}{2}({z_0}^2 + \chi {x_0}^2)$. Au voisinage de chaque point (x_0, y_0) tel que $y_0 \neq \frac{\chi}{2}x_0^2$, il y a alors deux pentes z_0 possibles. Lorsque $\chi \neq \frac{1}{4}$, on trouve :

$$\begin{cases} x(u) = \left(x_0 \cos(\omega u) + \frac{2z_0 - x_0}{2\omega} \sin(\omega u)\right) e^{u/2} \\ z(u) = \left(z_0 \cos(\omega u) + \frac{z_0 - 2\chi x_0}{2\omega} \sin(\omega u)\right) e^{u/2} \end{cases}$$

avec $\omega = \pm\frac{\sqrt{4\chi - 1}}{2}$. Ces solutions généralisent les résultats du cas réel : pli foyer $(\chi > \frac{1}{4})$, pli noeud $(0 < \chi < \frac{1}{4})$, pli col $(\chi < 0)$ par le calcul des racines carrées du nombre complexe $4\chi - 1$.

On obtient y en fonction de u en écrivant : $y(u) = \frac{1}{2}(z(u)^2 + \chi x(u)^2)$. Appelons $\mathcal{C}$ la courbe paramétrée définie par $u \mapsto (x(u), y(u))$ dans le plan $\mathbb{C}^2$ des x et y. Par le théorème des fonctions implicites, on peut écrire y en fonction de x si et seulement si $\dot{x}(0) \neq 0$, autrement dit si $z_0 \neq 0$. Et on obtient alors deux solutions ayant pour pentes respectives z_0 et $-z_0$ au point (x_0, y_0).

Si par contre $z_0 = 0$ alors l'équation (7) n'admet pas de solution en (x_0, y_0) mais si $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$, la courbe $\mathcal{C}$ passe par le point (x_0, y_0) et contient les trajectoires de deux solutions qui se réunissent en (x_0, y_0).

La propriété $z_0 = 0$ est équivalente à $y_0 = \frac{\chi}{2}x_0^2$, ce qui revient à dire que le point (x_0, y_0) appartient à la courbe $\Delta = \pi_*(\Gamma)$, où Γ est la courbe singulière $\{\frac{\partial F}{\partial z} = 0\}$ de $\mathbb{C}^3$, et où π est la projection sur $\mathbb{C}^2$, $(x, y, z) \mapsto (x, y)$.

On obtient alors la proposition suivante :

Proposition 2. *Lorsque $\chi \neq \frac{1}{4}$, l'équation $y = \frac{1}{2}(y'^2 + \chi x^2)$, $y(x_0) = y_0$ admet deux solutions locales si $y_0 \neq \frac{\chi}{2}x_0^2$, et n'admet pas de solution dans le cas contraire, mais si $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$, il existent deux solutions qui se réunissent en (x_0, y_0) et qui sont contenues dans la variété image de la courbe $\mathcal{C}$.*

2.2 Normalisation des équations différentielles implicites :

On se donne un germe d'équation différentielle implicite de la forme (5) :

$$y = \alpha y'^2 + \beta x y' + \gamma x^2 + ...$$

où "..." désigne des termes d'ordres supérieurs à 3 en x et en y'. D'après ce qui précède on peut réduire cette équation sous la forme :

$$y = \frac{1}{2}(y'^2 + \chi x^2) + ... \tag{9}$$

ou encore à :

$$y = \lambda x y' + ... \tag{10}$$

Soit X le champ de vecteurs liouvillien associé à cette dernière équation. Sa différentielle est le champ S défini précédemment, et ce champ s'écrit alors : $X = S + R$, où R est une perturbation d'ordre supérieur à 2. Comme S est également un champ de vecteurs liouvillien, R est un champ hamiltonien (i.e. $\mathcal{L}_R \omega = 0$), ainsi que ses termes à tout ordre.

Réciproquement : On se donne un germe de champ de vecteur liouvillien holomorphe quelconque, nul en zéro et qui a pour partie linéaire S, que l'on note $X = S + R$, où S est défini comme précédemment et R est un champ hamiltonien :

$$R = \left(\frac{\partial h}{\partial z}\right)\frac{\partial}{\partial x} + \left(-\frac{\partial h}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial z}, \quad \text{et } h \text{ un germe de fonction holomorphe.}$$

Alors l'équation différentielle implicite associée à X est exactement :

$$y = \lambda x y' + h(x, y')$$

Forme normale : Admettons que X soit normalisable par un difféomorphisme holomorphe et symplectique en une forme normale notée NF, dans ce cas NF est holomorphe et liouvillienne et d'après la proposition 1, l'équation différentielle implicite associée à NF est alors équivalente à l'équation de départ associée au champ X. Cette équation est alors une forme normale de l'équation (9).

Je donne des explications plus détaillées sur la structure des formes normales de ces équations différentielles implicites dans le cas de la dimension supérieure section 6.

2.3 Normalisation formelle de champ de vecteurs liouvilliens :

D'après ce qui précède on peut transformer l'équation (5) à l'aide d'un difféomorphisme qui préserve la structure de contact définie par la forme $dy - zdx$, pour qu'elle soit de type (9).

On considère alors une équation différentielle implicite de la forme (9), mais on se place dans le cas où $\chi \neq \frac{1}{4}$ c'est à dire $\lambda \neq \frac{1}{2}$.

Résonances : Les valeurs propres de S étant λ et $(1 - \lambda)$, on appelle résonances toutes relations de la forme :

$$q_1\lambda + q_2(1-\lambda) = \lambda \quad \text{ou} \quad q_1\lambda + q_2(1-\lambda) = (1-\lambda)$$
$$\text{avec} \quad (q_1, q_2) \in \mathbb{N}^2, q_1 + q_2 \geq 2$$

Proposition 3. *Soit X un germe de champ de vecteurs holomorphe liouvillien de $(\mathbb{C}^2, 0)$, nul en zéro et de partie linéaire S. Alors X est symplectiquement formellement normalisable.*

Preuve : Soit k un entier naturel non nul. On suppose X normalisé jusqu'à l'ordre $k-1$ et on va montrer qu'on peut trouver un changement de coordonnées symplectique qui normalise X jusqu'à l'ordre k. Pour cela on écrit :

$$X = S + N_{k-1} + V_k + R_{k+1}$$

où N_{k-1} est la partie déjà normalisée de X (i.e. $[S, N_{k-1}] = 0$), V_k est un champ de vecteurs homogène d'ordre k et hamiltonien et où R_{k+1} est une perturbation hamiltonienne d'ordre supérieure à $k + 1$.

On cherche un changement de coordonnée formel et symplectique. On va le chercher tangent à l'identité, comme le flot au temps 1 d'un champ hamiltonien, donc de la forme $\varphi_k = (Id + U_k + ...)$, (où ... désigne des termes d'ordres supérieurs à $k+1$ et) où U_k est homogène de degré k et l'hamiltonien d'une fonction holomorphe u nulle en zéro :

$$U_k(x,z) = (\frac{\partial u}{\partial z}(x,z), -\frac{\partial u}{\partial x}(x,z))$$

Écrivons ce que donne le champ de vecteur X via ce changement de variable :

$$\varphi_k{}^* X = X + [U_k, X] + ...$$

$$= S + N_{k-1} + \underbrace{V_k + [U_k, S]}_{\text{termes d'ordre } k} + \underbrace{R_{k+1} + [U_k, N_{k-1}] + [U_k, V_k] + [U_k, R_{k+1}] + ...}_{\text{termes d'ordres supérieurs à } k+1}$$

Ainsi, on doit trouver U_k tel que :

$$N_{k-1} + V_k + [U_k, S] = N_k, \quad \text{où } N_k \text{ est le normalisé de } X \text{ à l'ordre } k$$

Par exemple, dans le cas où V_k n'est constitué d'aucun monôme résonant l'équation à résoudre est :

$$[S, U_k] = V_k \tag{11}$$

Pour résoudre l'équation (11), on écrit : $S = S_0 + S_\lambda$ où $S_0 = z\frac{\partial}{\partial z}$ et $S_\lambda = \lambda x \frac{\partial}{\partial x} - \lambda z \frac{\partial}{\partial z}$ est le champ hamiltonien de $h(x,z) = \lambda xz$ et on note V_k comme le champ hamiltonien d'un polynôme homogène v de degré $k+1$: $V_k = H_v$. Alors :

$$[S, U_k] = [S_0, U_k] + [S_\lambda, U_k] = [z\frac{\partial}{\partial z}, U_k] + H_{\{h,u\}} = H_v$$

où $H_{\{h,u\}}$ est le champ hamiltonien de la fonction $\{h,u\}$ qui est le crochet de poisson de h et de u. Or :

$$[z\frac{\partial}{\partial z}, U_k] = \left(z\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\frac{\partial}{\partial x} + \left(-z\frac{\partial^2}{\partial z \partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial z}$$

et ce champ de vecteurs est l'hamiltonien de la fonction $z\frac{\partial u}{\partial z} - u$. Par conséquent, résoudre (11) revient à trouver une fonction u qui vérifie :

$$\{h, u\} + z\frac{\partial u}{\partial z} - u = v$$

De plus, $\{h,u\} = \lambda x \frac{\partial u}{\partial x} - \lambda z \frac{\partial u}{\partial z} = \mathcal{L}_{S_\lambda}(u)$, donc on résout :

$$\mathcal{L}_S(u) - u = \lambda x \frac{\partial u}{\partial x} + (1-\lambda) z \frac{\partial u}{\partial z} - u = v$$

$$\text{On pose alors : } v(x,z) = \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2, i+j=k+1} b_{ij} x^i z^j$$

$$\text{et on cherche : } u(x,z) = \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2, i+j=k+1} a_{ij} x^i z^j$$

On résout et on trouve :

$$(\lambda i + (1-\lambda)j - 1) \cdot a_{ij} = b_{ij}$$

L'équation $\lambda i + (1-\lambda)j = 1$, est une condition de résonance du monôme $x^i z^j$. Nous étudierons plus généralement cette condition en dimension supérieure en dernière section. Lorsque (i,j) ne correspond pas à un monôme résonant on prend :

$$a_{ij} = \frac{b_{ij}}{(\lambda i + (1-\lambda)j - 1)} \quad \text{et} \quad a_{ij} = 0 \text{ sinon.}$$

On a donc repoussé l'ordre de la normalisation :

$$\varphi_k^* X = S + N_k + R'_{k+1}$$

avec φ_k symplectique.

On procède ainsi à tout ordre. C'est possible, puisque comme φ_k est symplectique ${\varphi_k}^* X$ sera liouvillien, ce qui implique que V_{k+1} est hamiltonien. En effet :

Pour tout champ liouvillien Y quelconque, le champ $Y - z\frac{\partial}{\partial z}$ est hamiltonien (la dérivée de Lie de $\omega = dx \wedge dz$ par rapport à ce champ est nulle), autrement dit la "composante liouvillienne" de ${\varphi_k}^* X$ est dans la partie linéaire, par conséquent V_{k+1} est hamiltonien.

On peut alors répéter le processus et on obtient :

$$\Phi = lim_{k\to\infty}\Phi_k, \quad \text{où} \quad \Phi_k = \varphi_k \circ \Phi_{k-1} \quad \text{pour tout } k \geq 3, \text{ et } \Phi_2 = \varphi_2.$$

Φ est alors un difféomorphisme formel et symplectique, qui normalise le champ X.

3 Domaine de Poincaré :

Ici, nous donnons un résultat de normalisation d'équation différentielle implicites au voisinage d'un point singulier, dans le cas où l'invariant dynamique χ n'est pas un réel négatif.

Théorème 1. *On considère une équation de la forme (9) :*

$$(E) \quad : \quad y = \frac{1}{2}(y'^2 + \chi x^2) + ...$$

où "..." désigne des termes d'ordres supérieurs en x et y'.

I. *Lorsque $\chi \notin \mathbb{R}$ (i.e. $\lambda \notin \mathbb{R}$) on a :*

$$(E) \quad \sim \quad y = \frac{1}{2}(y'^2 + \chi x^2)$$

II. *Si $\chi \in]\frac{1}{4}, +\infty[$ (i.e. $\mathcal{R}e(\lambda) = \mathcal{R}e(1-\lambda) = \frac{1}{2}$), alors :*

$$(E) \quad \sim \quad y = \frac{1}{2}(y'^2 + \chi x^2)$$

III. *Et lorsque $\chi \in]0, \frac{1}{4}[$ (i.e. $\lambda \in]0,1[$), deux cas se présentent :*

a) $\forall q \in \mathbb{N}, q > 2, \chi \neq \frac{q-1}{q^2}$ *implique :*

$$(E) \quad \sim \quad y = \frac{1}{2}(y'^2 + \chi x^2)$$

b) *Mais s'il existe* $q \in \mathbb{N}, q > 2$ *tel que* $\chi = \frac{q-1}{q^2}$, *alors :*

$$(E) \quad \sim \quad y = \frac{1}{2}(y'^2 + \chi x^2)$$

$$\textit{ou bien} \quad (E) \quad \sim \ y = \frac{1}{q}xy' + x^q \ \sim \ y = \frac{q-1}{q}xy' + y'^q$$

$$\sim \ y = \frac{1}{2}(y'^2 + \chi x^2) + \left(\frac{q-1}{q}x - y'\right)^q$$

On sait déjà que (E) est équivalente à une équation de la forme (10). Pour démontrer ce théorème, on va normaliser (voire linéariser) symplectiquement le champ liouvillien $X = S + R$ associé.

Lemme 1. *Lorsque le couple* $(\lambda, 1-\lambda)$ *appartient au domaine de Poincaré (i.e. le segment reliant les points d'affixes* λ *et* $(1-\lambda)$ *ne contient pas l'orgine), et qu'il n'y a aucune résonance, le champ de vecteurs liouvillien* X *est symplectiquement et holomorphiquement linéarisable.*

Preuve : D'après le théorème de Poincaré (voir [Arn80]), le champ X est holomorphiquement linéarisable au voisinage de zéro. Bien que le difféomorphisme linéarisant ne soit *a priori* pas symplectique, il est néanmoins déterminé de manière unique car il n'y a pas de résonance ! Par conséquent, cette transformation holomorphe et le symplectomorphisme formel de la proposition (3) sont égaux. Ainsi ce changement de variable est non seulement convergent mais également symplectique.

Etude des relations de résonance : Écrivons les relations de résonances possibles avec $(q_1, q_2) \in \mathbb{N}^2, q_1 + q_2 \geq 2$:

$$R_1 \quad : \quad q_1\lambda + q_2(1-\lambda) = \lambda \iff (q_1 - 1 - q_2)\lambda = -q_2 \tag{12}$$

$$\text{et} \quad R_2 \quad : \quad q_1\lambda + q_2(1-\lambda) = (1-\lambda) \iff (q_1 + 1 - q_2)\lambda = 1 - q_2 \tag{13}$$

Le segment reliant les points d'affixes λ et $(1-\lambda)$ a pour milieu le point d'affixe $\frac{1}{2}$, donc dans tous les cas I, II et III du théorème le couple $(\lambda, 1-\lambda)$ appartient au domaine de Poincaré.

De plus, on voit alors que si $\lambda \notin \mathbb{Q}$, il n'y a pas de résonance. Ainsi, d'après le lemme 1, X est symplectiquement linéarisable, ce qui démontre les points I et II du théorème.

Si en revanche λ est rationnel il peut y avoir des résonances : Posons $\lambda = \frac{p}{q}$, avec p et q premiers entre eux et $q > 0$; alors :

$$R_1 \iff \begin{cases} q_1 = 1 + k(p-q) \\ q_2 = kp \end{cases} \quad \text{pour } k \in \mathbb{Z}^*$$

$$\text{et} \quad R_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} q_1 = k(p-q) \\ q_2 = 1+kp \end{array} \right. \quad \text{pour } k \in \mathbb{Z}^*$$

avec $q_1 + q_2 = 1 + k(2p - q) \geq 2$. Lorsque $\lambda \in]0,1[$ on a alors $q > p > 0$.

Pour la relation R_1 : $q_2 \geq 0 \Leftrightarrow k \geq 0$ et $q_1 \geq 0 \Leftrightarrow q - \frac{1}{k} \leq p \leq q-1 \Leftrightarrow \frac{1}{k} \geq 1 \Leftrightarrow k \leq 1$, donc $k = 1$. Mais alors $p = q-1$. Donc si $p \neq (q-1)$ il n'y a pas de résonance. Et si $p = (q-1)$ (i.e. $\chi = \frac{(q-1)}{q^2}$), alors R_1 admet comme solution : $q_1 = 0, q_2 = (q-1)$.

Pour la relation R_2 : $q_1 \geq 0 \Leftrightarrow k \leq 0$ et $q_2 \geq 0 \Leftrightarrow p \leq -\frac{1}{k} \leq 1$, donc $k = -1$, et $p = 1$. Donc si $p \neq 1$ il n'y a pas de résonance. Et si $p = 1$ (i.e. $\chi = \frac{(q-1)}{q^2}$), alors R_2 admet comme solution : $q_1 = (q-1), q_2 = 0$.

Or comme $\lambda \neq \frac{1}{2}$, p ne peut pas valoir simultanément 1 et $(q-1)$.

Si $\lambda = \frac{q-1}{q}$ (cas où R_1 a une solution) alors d'après le théorème de Poincaré X se normalise en un champ de type :

$$\left(\lambda x + A \cdot z^{q-1}\right) \frac{\partial}{\partial x} + (1-\lambda) z \frac{\partial}{\partial z}$$

et si $\lambda = \frac{1}{q}$ (cas où R_2 a une solution) alors X se normalise en un champ de type :

$$\lambda x \frac{\partial}{\partial x} + \left((1-\lambda)z + A' \cdot x^{q-1}\right) \frac{\partial}{\partial z}$$

où A et A' sont des constances complexes.

Remarque : On peut passer de l'une de ces formes normales à l'autre (en conservant la valeur de la constante, i.e. $A = A'$) par une transformation symplectique de Legendre ($X = -z, Z = x$), ce qui fait passer du cas $\lambda = \frac{1}{q}$ au cas $\lambda = \frac{q-1}{q}$ en échangeant les variables x et z.

Ainsi les équations correspondantes $y = \frac{1}{q} x y' + x^q$ et $y = \frac{q-1}{q} x y' + y'^q$ sont équivalentes via la transformation de Legendre ($X = -z,\ Y = y - xz,\ Z = x$).

Fin de la preuve : L'étude des résonances montre alors que, lorsque pour tout $q \in \mathbb{N}, q > 2$, $\chi \neq \frac{(q-1)}{q^2}$ alors $\lambda \neq \frac{1}{q}$ et $\lambda \neq \frac{q-1}{q}$, et du coup il n'y a aucune résonance, et d'après le lemme 1, on a prouvé le point III.a) du théorème.

Par contre s'il existe un $q \in \mathbb{N}, q \geq 2$, tel que $\chi = \frac{(q-1)}{q^2}$, alors on ne peut plus appliquer le lemme 1 car il y a une résonance. Dans ce cas soit $\lambda = \frac{1}{q}$ soit $\lambda = \frac{q-1}{q}$, mais d'après la remarque précédente, quitte à appliquer une transformation symplectique de Legendre, on peut supposer que $\lambda = \frac{1}{q}$.

D'après la proposition 3 le champ X est formellement normalisable par un difféomorphisme formel $\hat{\psi}$ symplectique. D'un autre coté d'après le théorème de Poincaré, X est normalisable par un changement de variable holomorphe φ. Par conséquent le difféomorphisme formel $u := \hat{\psi} \circ \varphi^{-1}$ est tangent à l'identité en zéro et envoie une forme normale sur une autre. Il est donc de la forme :

$$X = x, \quad Z = z + Bx^{q-1}$$

où B est une constance complexe. Or u est holomorphe et symplectique puisque $dX \wedge dZ = dx \wedge dz$. Dans un premier temps cela montre que $\hat{\psi} = u \circ \varphi$ converge, c'est donc une transformation holomorphe, on peut alors la noter ψ. Et dans un second temps on en déduit que le difféomorphisme $\varphi = u^{-1} \circ \psi$ est symplectique.

Ainsi, le champ X est symplectiquement et holomorphiquement normalisable en un champ de la forme :

$$\lambda x \frac{\partial}{\partial x} + \left((1-\lambda)z + A \cdot x^{q-1}\right) \frac{\partial}{\partial z}$$

où A est une constance complexe. Si A est nulle, alors le champs X est symplectiquement et holomorphiquement linéarisable. Ainsi l'équation de départ (E) est équivalente à l'équation (7).

Et si A est non nulle on peut alors transformer ce champ afin que la constante soit égale à q. En effet, il suffit d'appliquer au champ précédent le changement de variable suivant :

$$\varphi(x,z) = (X,Z) = (Cx, C^{-1}z) \quad \text{avec} \quad C = \left(\frac{A}{q}\right)^{1/q}.$$

On a alors démontré que le champ X se normalise symplectiquement et holomorphiquement en le champ :

$$\lambda x \frac{\partial}{\partial x} + \left((1-\lambda)z + q \cdot x^{q-1}\right) \frac{\partial}{\partial z}$$

Or l'équation différentielle implicite qui correspond au champ précédent est :

$$y = \lambda x y' + x^q$$

et en appliquant un changement de variable Ψ_λ vu précédemment, pour $\lambda = \frac{1}{q}$ on trouve :

$$Y = \frac{1}{2}(Y'^2 + \chi X^2) + \left(\frac{q-1}{q}X - Y'\right)^q.$$

Ce qui démontre le point III.b) du théorème.

4 Domaine de Siegel :

Nous allons à présent donner un résultat, dans le cas où l'invariant dynamique χ est un réel négatif.

4.1 Cas non-résonnant :

Théorème 2. *On se place dans le même contexte que le théorème 1 : On considère une équation de la forme (9) :*

$$(E) \quad : \quad y = \frac{1}{2}(y'^2 + \chi x^2) + ...$$

où "..." désigne des termes d'ordres supérieurs en x et y'.

On suppose que :

i) $\chi < 0$ *(i.e. $\lambda \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$).*

ii) *Il existe* $\nu > 2,\ c > 0$ *tels que pour tout* $q_1, q_2 \in \mathbb{N}, q_1 + q_2 \geq 3$, *on a :*

$$|q_1\lambda + q_2(1-\lambda) - 1| > \frac{C}{(q_1+q_2)^{\nu}}$$

Alors :

$$(E) \quad \sim \quad y = \frac{1}{2}(y'^2 + \chi x^2)$$

Remarque : L'hypothèse (ii) est une condition diophantienne sur les petits diviseurs et implique qu'il y a pas de résonance. Elle est équivalente à la condition diophantienne de Siegel sur les petits diviseurs du champ X associé :

Il existe $\nu > 2,\ c > 0$ tels que pour tout $q_1, q_2 \in \mathbb{N}, q_1 + q_2 \geq 2$, on a : $|q_1\lambda + q_2(1-\lambda) - \lambda| > \frac{C}{(q_1+q_2)^{\nu}}$ et $|q_1\lambda + q_2(1-\lambda) - (1-\lambda)| > \frac{C}{(q_1+q_2)^{\nu}}$.

Sous cette condition, λ n'est pas rationnel ce qui équivaut à dire que pour tout $p, q \in \mathbb{N}, p+q \geq 2, p > q > 0$, on a : $\chi \neq \frac{p(q-p)}{q^2}$.

Preuve : D'après l'étude des relations de résonance qui précède, il n'y a aucune résonance si $\lambda \notin \mathbb{Q}$. Or d'après la condition (ii) et la remarque, λ ne peut pas être rationnel. Le champ X est donc formellement linéarisable. Pour avoir la convergence, on utilise un théorème de Siegel :

Théorème (Siegel : [Sie42]). *Si le couple* $(\lambda, 1-\lambda)$ *vérifie la condition diophantienne de Siegel alors le champ* X *est holomorphiquement linéarisable.*

Comme il n'y a aucune résonance, ce difféomorphisme linéarisant est unique. Il est par conséquent égal au difféomorphisme symplectique à priori formel de la proposition 3. Il est donc holomorphe et symplectique. Ainsi, le champ X est holomorphiquement et symplectiquement linéarisable, ce qui démontre le théorème 2.

Il existe une condition plus faible que la condition diophantienne de Siegel, c'est la condition (ω) de Brjuno que nous verrons plus loin.

4.2 La méthode des chemins :

Proposition 4. *Soient* X *et* X' *deux germes champs de vecteurs liouvilliens et holomorphes sur* $(\mathbb{C}^n, 0)$, *conjugués l'un de l'autre par un difféomorphisme* h *holomorphe et tangent à l'identité en zéro. Alors,* X *et* X' *sont symplectiquement conjugués.*

La démonstration est empruntée à Marc Chaperon [Cha99]. Elle utilise la méthode de Moser, une méthode générale utilisée pour fabriquer des changements de variables en intégrant des équations différentielles qui dépendent d'un paramètre d'isotopie.

Preuve : On pose $X = h^*X'$, et ω_0 la forme symplectique standard. Comme X et X' sont liouvilliens on a alors : $\mathcal{L}_X\omega_0 = \mathcal{L}_{X'}\omega_0 = \omega_0$. On pose $\omega_1 := h^*\omega_0$ et $\omega_t = \omega_0 + t(\omega_1 - \omega_0)$, pour $0 \leq t \leq 1$. On cherche une famille de difféomorphisme $(g_t)_{0\leq t\leq 1}$ telle que pour tout $t \in [0,1]$:

$$(1) \ : \ g_t^*X = X \quad \text{ et } \quad (2) \ : \ g_t^*\omega_t = \omega_0.$$

On pose $G_t := \left(\frac{d}{dt}g_t\right) \circ g_t^{-1}$. On a alors :

$$(1) \Longleftrightarrow \mathcal{L}_{G_t}X = 0 \ \text{ et}$$

$$(2) \Longleftrightarrow \frac{d}{dt}(g_t^*\omega_t) = 0 = g_t^*\left(\mathcal{L}_{G_t}\omega_t + \frac{d}{dt}\omega_t\right)$$

Or d'après la formule de Cartan, pour tout champ de vecteur Y on a :

$$\mathcal{L}_Y = di_Y + i_Y d$$

On applique alors cette formule au champ G_t et comme pour tout t la forme ω_t est fermée on a : $\mathcal{L}_{G_t}\omega_t = d(i_{G_t}\omega_t)$ et $\frac{d}{dt}\omega_t = \omega_1 - \omega_0$. On pose $\beta = \omega_1 - \omega_0$ et on a :

$$\mathcal{L}_X\beta = \mathcal{L}_X\omega_1 - \mathcal{L}_X\omega_0 = \mathcal{L}_X(h^*\omega_0) - \omega_0 \ \text{ car } X \text{ est liouvillien}$$

$$= h^*\left(\mathcal{L}_{h_*X}\omega_0\right) - \omega_0 = h^*\left(\mathcal{L}_{X'}\omega_0\right) - \omega_0 = h^*\omega_0 - \omega_0 \ \text{ car } X' \text{ est liouvillien}$$

$$\text{donc } \ \mathcal{L}_X\beta = \beta$$

On applique la formule de Cartan pour le champ X et comme β est également fermée, on en déduit que $\beta = d(i_X\beta)$ et que $\mathcal{L}_X\omega_t = \omega_t$.

Pour résoudre (2) il suffit alors de résoudre :

$$i_{G_t}\omega_t + i_X\beta = 0$$

Or $i_X\beta$ est une forme différentielle et pour tout t, $\tilde{\omega}_t : TM \to T^*M, X \mapsto i_X\omega_t$ est un isomorphisme car la forme ω_t est non dégénérée. On obtient une solution pour (2) et on a :

$$\mathcal{L}_X(i_{G_t}\omega_t) = -\mathcal{L}_X(i_X\beta)$$
$$= i_{\mathcal{L}_XG_t}\mathcal{L}_X\omega_t = -i_{(\mathcal{L}_XX)}\beta = 0$$
$$= i_{\mathcal{L}_XG_t}\omega_t = 0, \ \text{ car } \mathcal{L}_X\omega_t = \omega_t$$

ω_t étant une forme non-dégénérée on en déduit que :

$$-\mathcal{L}_XG_t = 0 = -[X, G_t] = \mathcal{L}_{G_t}X = 0$$

On a trouvé une famille de difféomorphisme satisfaisant les équations (1) et (2).

On peut ainsi définir $\varphi := h \circ g_1$, et on a : par (1), $X = \varphi^*X'$ et par (2) : $\varphi^*\omega_0 = g_1^*(h^*\omega_0) = g_1^*\omega_1 = \omega_0$. Ainsi les champs X et X' sont conjugués l'un de l'autre par le difféomorphisme symplectique φ.

4.3 Cas résonnant :

Étude des résonances : On se place dans le cas résonnant où $\lambda = \frac{p}{q}$, avec $p \geq q > 0$, on a donc $\chi = \frac{p(q-p)}{q^2}$. Le cas où $\lambda \leq 0$, est analogue, on peut même s'y ramener par une transformation de Legendre échangeant x et z ainsi que λ et $(1-\lambda)$.

On considère à nouveau les relations (R_1) et (R_2) (équations (12) et (13)) : Comme $p \geq q > 0$ on a $2p - q \geq p \geq 1$, d'où :

$$q_1 + q_2 \geq 2 \Longleftrightarrow k \geq \frac{1}{2p-q} \Longleftrightarrow k \geq 1.$$

Par conséquent cette fois-ci (R_1) et (R_2) admettent des solutions pour $k \in \mathbb{N}^*$. Le champ X se normalise donc formellement en une forme normale de type :

$$NF = \left(\lambda x + xf(x^{p-q}z^p)\right)\frac{\partial}{\partial x} + \left((1-\lambda)z + zg(x^{p-q}z^p)\right)\frac{\partial}{\partial z} \tag{14}$$

où f et g sont des séries formelles à une variable, nulles en zéro.

Lorsque $\lambda \neq 1$ alors, on peut écrire NF sous la forme :

$$NF = \left(\lambda x F(x^{p-q}z^p)\right)\frac{\partial}{\partial x} + \left((1-\lambda)zG(x^{p-q}z^p)\right)\frac{\partial}{\partial z}$$

où F et G sont des séries formelles à une variable qui valent 1 en zéro.

Dorénavant et par commodité, on notera le monôme résonant

$$t := x^{p-q}z^p.$$

Étude des petits diviseurs : Les petits diviseurs prennent la forme suivante :

$$q_1\lambda + q_2(1-\lambda) - 1$$

pour $(q_1, q_2) \in \mathbb{N}^2, q_1 + q_2 \geq 3$. Or ces éléments sont tous contenus dans l'ensemble $\mathbb{Z} + \lambda\mathbb{Z}$, qui est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$. Or, comme λ est rationnel il n'est pas dense mais de la forme $\alpha\mathbb{Z}$ où $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Autrement dit, il n'y a pas de petit diviseur au voisinage de zéro. Par conséquent la condition (ω) de Brjuno est automatiquement vérifiée :

$$(\omega) \qquad -\sum_{k\geq 0} \frac{\ln(\omega_k)}{2^k} < +\infty$$

où $\omega_k = \inf_{(q_1,q_2)\in\mathbb{N}^2, 3\leq q_1+q_2\leq 1+2^k} \{|q_1\lambda + q_2(1-\lambda) - 1|, \quad q_1\lambda + q_2(1-\lambda) - 1 \neq 0\}$.

4.4 Normalisation dans le cas intégrable :

Théorème 3. *On considère une équation de la forme (9) :*

$$(E) \quad : \quad y = \frac{1}{2}(y'^2 + \chi x^2) + \ldots$$

avec $\lambda = \frac{p}{q}$, $p \geq q > 0$, $\chi = \frac{p(q-p)}{q^2}$. Le champ liouvillien X associé à (E) se normalise donc formellement en une forme normale de type (14) notée NF.

Supposons $\mathcal{L}_{NF}(t) = 0$, i.e. t est une intégrale première de NF. $(*)$

Alors :

$$(E) \quad \sim \quad y = \frac{1}{2}(y'^2 + \chi x^2)$$

Remarque 1 : Si on écrit :

$$NF = \left(\lambda x + x\sum_{k\geq 1} a_k t^k\right)\frac{\partial}{\partial x} + \left((1-\lambda)z + z\sum_{k\geq 1} b_k t^k\right)\frac{\partial}{\partial z}$$

l'hypothèse $(*)$ est équivalente à : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ (p-q)\cdot a_k + p\cdot b_k = 0$, ce qui revient à dire que la forme normale NF est de la forme $\hat{a}\cdot S$, où $\hat{a}$ est une série formelle en t et valant 1 en zéro.

En effet : $(*) \iff \forall k \geq 1,\ \lambda b_k = (1-\lambda)a_k$. Dans le cas où $\lambda = 1$, on a $t = z$ et dans ce cas :

$$\mathcal{L}_{NF}(z) = 0 \iff \forall k \geq 1, b_k = 0$$

Et on a bien $NF = \hat{a}(z)\cdot S$ avec $\hat{a}(z) = 1 + \sum_{k\geq 1} a_k z^k$.

Si $\lambda \neq 1$ alors on a $\frac{a_k}{\lambda} = \frac{b_k}{(1-\lambda)}$ et :

$$NF = \lambda x\left(1 + \sum_{k\geq 1}\frac{a_k}{\lambda}t^k\right)\frac{\partial}{\partial x} + (1-\lambda)z\left(1 + \sum_{k\geq 1}\frac{b_k}{(1-\lambda)}t^k\right)\frac{\partial}{\partial z}$$

On en déduit alors que $NF = \hat{a}(t)\cdot S$ avec :

$$\hat{a}(t) = \left(1 + \sum_{k\geq 1}\frac{a_k}{\lambda}t^k\right) = \left(1 + \sum_{k\geq 1}\frac{b_k}{(1-\lambda)}t^k\right)$$

Remarque 2 : Si X admet une forme normale de la forme $NF = \hat{a}\cdot S$, alors toutes les formes normales de X sont de cette forme.

En effet : Si NF' est une autre forme normale de X, alors il existe un difféomorphisme tangent à l'identité de la forme $\exp(U)$ tel que $[S, U] = 0$ et $NF' = \exp(U)^*NF$. Or :

$$\begin{aligned}
\exp(U)^*NF &= NF + [U, NF] + [U, [U, NF]] + ... \\
&= \hat{a}\cdot S + [U, \hat{a}\cdot S] + [U, [U, \hat{a}\cdot S]] + ... \\
&= \hat{a}\cdot S + \hat{a}\cdot \underbrace{[U,S]}_{=\,0} + \mathcal{L}_U(\hat{a})\cdot S + [U, \hat{a}\cdot \underbrace{[U,S]}_{=\,0} + \mathcal{L}_U(\hat{a})\cdot S] + ... \\
&= \hat{a}\cdot S + \mathcal{L}_U(\hat{a})\cdot S + \mathcal{L}_U(\hat{a})\cdot \underbrace{[U,S]}_{=\,0} + \mathcal{L}_U(\mathcal{L}_U(\hat{a}))\cdot S + ... \\
&= (\hat{a} + \mathcal{L}_U(\hat{a}) + \mathcal{L}_U(\mathcal{L}_U(\hat{a})) + ...)\cdot S
\end{aligned}$$

Or $(\hat{a} + \mathcal{L}_U(\hat{a}) + \mathcal{L}_U(\mathcal{L}_U(\hat{a})) + ...)$ est bien une série formelle en t qui vaut 1 en zéro.

Revenons à la preuve du théorème 3.

Preuve : Pour démontrer la convergence de la normalisation dans le cas du théorème 3, on va utiliser le théorème de Brjuno :

Théorème (Brjuno : [Brj71]). *Si X se normalise formellement en une forme normale de type $\hat{a} \cdot S$, et si $(\lambda, 1-\lambda)$ vérifient la condition (ω) de Brjuno, alors X est holomorphiquement normalisable.*

De plus, d'après la proposition 3, le champ X est symplectiquement et formellement normalisable en une forme normale liouvillienne de la forme $\hat{f} \cdot S$. Or si une telle forme normale est liouvillienne, alors $\hat{f} = 1$. En effet si on note ω_0 la forme symplectique santard :

$$\omega_0 = \mathcal{L}_{\hat{f} \cdot S}\omega_0 = \hat{f} \cdot \mathcal{L}_S\omega_0 + (\mathcal{L}_S\hat{f}) \cdot \omega_0 = \hat{f} \cdot \omega_0$$

puisque, comme $\hat{f}$ est une fonction de t, on a $\mathcal{L}_S\hat{f} = 0$.

Par conséquent, X est formellement linéarisable. Mais dans ce cas, toutes les formes normales sont égales à S. En effet, si NF' est une forme normale alors il existe un difféomorphisme tangent à l'identité en zéro de la forme $(Id + U)$ avec $[S, U] = 0$ tel que :

$$(Id + U)_*S = NF', \text{ mais } (Id + U)_*S = S.$$

D'après cette remarque et le Théorème de Brjuno, on en déduit que X est holomorphiquement linéarisable. Mais comme X et S sont tous deux liouvillien, d'après la proposition 4, ils sont symplectiquement conjugués. On en déduit que X est symplectiquement et holomorphiquement linéarisable, ce qui démontre le théorème 3.

5 Normalisation dans le cas non-intégrable :

5.1 Normalisation formelle :

On se place à présent dans le cas où $\mathcal{L}_{NF}(t) \neq 0$. Comme $t = x^{p-q}z^p$, cela équivaut à : $\exists\ m \in \mathbb{N}^*,\ \beta := (p-q) \cdot a_m + p \cdot b_m \neq 0$. On suppose également que m est le plus petit entier qui vérifie cette propriété et on note $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) := (a_m, b_m)$; on écrira aussi $\beta = (p-q) \cdot \alpha_1 + p \cdot \alpha_2 \neq 0$.

Définition : On définit $\mathcal{E}_{m,\lambda,\alpha}$ l'ensemble des champs de vecteurs holomorphes de la forme :

$$(x(\lambda_1 + \alpha_1 t^m) + t^m f_1(x,z))\frac{\partial}{\partial x} + (z(\lambda_2 + \alpha_2 t^m) + t^m f_2(x,z))\frac{\partial}{\partial z}$$

avec$f_1(x,z) = x\tilde{f}_1(x,z)$, $f_2(x,z) = z\tilde{f}_2(x,z)$ et $(p-q) \cdot \tilde{f}_1(x,z) + p \cdot \tilde{f}_2(x,z) = 0$, pour $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$.

Dans le cas présent de la dimension 2, tout champ de vecteurs 1-résonnant (i.e. lorsque l'ensemble des résonances est engendré par un seul monôme) est analytiquement équivalent à un élément de $\mathcal{E}_{m,\lambda,\alpha}$ [Sto96]. Cela signifie qu'il est conjugué à un élément de $\mathcal{E}_{m,\lambda,\alpha}$ à multiplication près d'une fonction unité (i.e. valant 1 en 0). L'équivalence analytique assure l'équivalence des feuilletages de ces champs.

De plus, tout élément $X \in \mathcal{E}_{m,\lambda,\alpha}$ se normalise formellement en la forme normale :

$$NF_\alpha = x(\lambda_1 + \alpha_1 t^m)\frac{\partial}{\partial x} + z(\lambda_2 + \alpha_2 t^m)\frac{\partial}{\partial z}$$

Par conséquent, si on considère un système de la forme :

$$(E) \quad : \quad \begin{cases} y = g(x,z) = \lambda xz + ... \\ dy - zdx = 0 \end{cases}$$

avec $\lambda = \frac{p}{q}$, $p \geq q > 0$, $\chi = \frac{p(q-p)}{q^2}$ et où X est le champ liouvillien associé à (E), alors il existe un germe de fonction unité f sur $(\mathbb{C}^2, 0)$ tel que $f \cdot X$ soit formellement normalisable sous la forme :

$$NF_\alpha = x(\lambda + \alpha_1 t^m)\frac{\partial}{\partial x} + z((1-\lambda) + \alpha_2 t^m)\frac{\partial}{\partial z}$$

Cette forme normale est liouvillienne si et seulement si :

$$\alpha_1 + \alpha_2 + m(p-q)\alpha_1 + mp\alpha_2 = 0$$

En effet $\mathcal{L}_{NF_\alpha}\omega = \mathrm{div}(NF_\alpha)\omega$, où div désigne la divergence du champ de vecteur. Donc :

$$\mathcal{L}_{NF_\alpha}\omega = \omega \iff \mathrm{div}(NF_\alpha) = 1$$

$$\iff \frac{\partial(x(\lambda + \alpha_1 t^m))}{\partial x} + \frac{\partial(z((1-\lambda) + \alpha_2 t^m))}{\partial z} = 1$$

$$\iff (\lambda + \alpha_1 t^m) + \alpha_1 m(p-q)t^m + (1-\lambda) + \alpha_2 t^m + mp\alpha_2 t^m = 1$$

$$\iff \alpha_1 + \alpha_2 + m(p-q)\alpha_1 + mp\alpha_2 = 0$$

Si NF_α était bien liouvillienne (et nous verrons qu'il est toujours possible de s'y ramener), le feuilletage caractéristique de l'équation (E) serait alors formellement équivalent à celui du système :

$$\begin{cases} y = xz(\lambda + \gamma t^m) \\ dy - zdx = 0 \end{cases} \tag{15}$$

Avec $\gamma = \frac{\alpha_1+\alpha_2}{qm} = \frac{\alpha_1}{(1+pm)} = \frac{-\alpha_2}{(1+(p-q)m)}$.

Malheureusement il n'est pas toujours possible d'avoir une normalisation holomorphe.

Contre-exemple : On considère l'équation :

$$Y = \frac{1}{2}(Y')^2 + (X - Y')^2(Y' + 1)$$

En appliquant la transformation de contact $X = x + z$, $Y = y + \frac{1}{2}z^2$, $Z = z$, (vue dans les sections précédentes avec $\lambda = 0$) on obtient l'équation :

$$y = x^2 y' + x^2$$

On souhaite trouver une transformation de contact de la forme $\Psi(x,y,z) = (X,Y,Z) = (x, y+\varphi(x), z+\varphi'(x))$ avec $\varphi(x) = \sum_{\mathbb{N}^*} \varphi_n x^n$, qui normalise l'équation en la forme normale :

$$Y = X^2 Y'$$

équation d'ailleurs équivalente à $Y = \frac{1}{2}(Y'^2) + (X - Y')^2 Y'$.

On a alors :

$$y + \varphi(x) = x^2(y' + \varphi'(x))$$

$$\text{donc} \quad x^2 + \varphi(x) = x^2 \varphi'(x)$$

Ce qui donne $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = -1$ et pour tout $n \geq 3, \varphi_n = (n-1)\varphi_{n-1}$. On obtient ainsi la série divergente :

$$\varphi(x) = \sum_{n \geq 2} -(n-1)!\, x^n.$$

En revanche, on peut espérer établir des transformations entre l'équation (E) et l'équation (15) qui ne seront pas holomorphes sur un voisinage complet de 0 mais sur des voisinages sectoriels.

5.2 Normalisation sectorielle :

Définition : On définit pour $r, R > 0, \delta \in \mathbb{C}^*$ et $0 \leq j \leq 2m-1$ un entier :

$$DS_j(r,R,\delta) = \left\{(x,z) \in \mathbb{C}^2 | \left| \arg t - \frac{1}{m}\left(\arg \delta + \pi(j + \frac{1}{2})\right)\right| < \frac{\pi}{m} - \varepsilon \right\}$$

$$\text{avec}, 0 < |t| < r,\ |x| < R,\ |z| < R.$$

Nous allons utiliser un théorème de normalisation sectorielle appliqué au cas de la dimension deux.

Théorème (Stolovitch : [Sto96]). *Soit $0 < \varepsilon < \pi/2m$ fixé et $X \in \mathcal{E}_{m,\lambda,\alpha}$.*

On suppose :

(H_1) *Les valeurs propres (λ_1, λ_2) du champ X sont situées sur une droite (d) passant par l'origine.*

(H_2) *Il existe un indice i_0 tel que $\lambda_{i_0} \in (d)$ soit non nul et tel que :*

$$\min_{i \neq i_0} Re\left(\frac{\alpha_i}{\beta} - \frac{\lambda_i}{\lambda_{i_0}} \frac{\alpha_{i_0}}{\beta}\right) > 0$$

Alors, pour tout $0 \leq j \leq 2m-1$, il existe un système de coordonnées locales $(X,Z) = \Phi_j(x,z)$ tangent à l'identité en zéro, holomorphe dans le domaine sectoriel $DS_j(r,R,\delta)$ avec r, R suffisamment petits et $\delta = \delta(\lambda,\beta) \in \mathbb{C}^*$ de module 1, dans lequel le champs X s'écrit

$$X(\lambda_1 + \alpha_1 T^m)\frac{\partial}{\partial X} + Z(\lambda_2 + \alpha_2 T^m)\frac{\partial}{\partial Z}$$

Ce système de coordonnées conserve le monôme résonnant (i.e. $t = T$). Chaque fonction Φ_j admet la fonction $\hat{\Phi}$ comme développement asymptotique en t au sens de Gérard-Sibuya dans $DS_j(r,R,\delta)$ (où $\hat{\Phi}$ est le difféomorphisme formel qui conjugue formellement X à cette forme normale).

L'hypothèse (H_2) de ce théorème, revient dans notre cas à dire que, $\lambda > 0$, or ici $\lambda \geq 1$.

L'hypothèse (H_1) est également vérifiée car λ et $(1-\lambda)$ appartiennent à $\mathbb{R}$.

Théorème 4. *Sous ces hypothèses et avec les notations précédentes, les feuilletages caractéristiques des systèmes implicites* (E) *et (15) sont holomorphiquement équivalents sur un voisinage épointé de zéro.*

Pour cela, on va d'abord monter le lemme suivant :

Lemme 2. *Pour toute forme normale* NF_α*, il existe une forme normale de même forme* $NF_{\alpha'}$ *mais liouvillienne et telle que, pour tout* $0 \leq j \leq 2m-1$ *et pour* r *et* R *assez petits, on peut trouver un biholomorphisme* Ψ_j *du domaine sectoriel* $DS_j(r, R, \delta)$ *et qui envoie* NF_α *sur* $NF_{\alpha'}$.

Preuve : Étant donnée une forme normale de la forme (14) :

$$NF = (\lambda x + xf(t))\,\frac{\partial}{\partial x} + ((1-\lambda)z + zg(t))\,\frac{\partial}{\partial z}$$

où f et g sont des séries formelles nulles en zéro, NF est liouvillienne si et seulement si sa divergence est égale à 1, soit :

$$f(t) + g(t) + (p-q)\cdot tf'(t) + p \cdot tg'(t) = 0 \tag{16}$$

Si NF n'est pas liouvillienne, on va chercher un changement de coordonnées dans lequel elle le sera. On cherche un changement de coordonnées Ψ, tangent à l'identité et tel que $(\Psi^* NF)$ soit encore une forme normale. On va donc chercher Ψ sous la forme : $(X, Z) = (x \exp A(t), z \exp B(t))$, avec $(p-q)A(t) + pB(t) = 0$ pour tout t. On a alors $T := X^{p-q}Z^p = x^{p-q}z^p = t$. Le domaine sectoriel est alors préservé et on obtient :

$$\begin{aligned}
\dot{X} &= \lambda X + X \cdot (f(t) + tA'(t) \cdot [(p-q)f(t) + pg(t)]) \\
\dot{Z} &= (1-\lambda)Z + Z \cdot (g(t) + tB'(t) \cdot [(p-q)f(t) + pg(t)])
\end{aligned}$$

Pour que cette nouvelle forme normale soit liouvillienne, il faut et il suffit que la fonction $A(t)$ vérifie une équation différentielle obtenue en appliquant l'équation (16) à cette forme normale et en utilisant la relation $(p-q)A(t) + pB(t) = 0$ pour tout t :

$$[f(t) + g(t) + (p-q)tf'(t) + ptg'(t)] + \frac{1}{\lambda} tA'(t)[(p-q)f(t) + pg(t)] = 0$$

Or la fonction $(p-q)f(t) + pg(t)$ de t, n'est pas identiquement nulle au voisinage de zéro puisque qu'on est dans le cas non-intégrable.

Si on applique l'équation différentielle précédente à la forme normale NF_α, on obtient :

$$t \cdot A'(t) = C := -\lambda \frac{(\alpha_1 + \alpha_2 + m((p-q)\alpha_1 + p\alpha_2))}{(p-q)\alpha_1 + p\alpha_2}$$

Or, il n'existe pas en général de solution holomorphe au voisinage de zéro, qui vérifie cette équation. En revanche si on pose $A(t) = C \ln_j(t)$, où $\ln_j$ est une détermination du logarithme complexe judicieusement choisie, on obtient une solution $A(t)$ qui est holomorphe dans le domaine sectoriel $DS_j(r, R, \delta)$ et ce pour tout $0 \leq j \leq 2m-1$.

On peut définir une détermination holomorphe du logarithme complexe sur chaque ensemble de la forme : $\mathbb{C} \setminus d(z_0, \vec{u}_\theta)$, où $z_0 \in \mathbb{C}$, θ est un nombre complexe de module 1, $\vec{u}_\theta$ est un vecteur d'affixe θ, et où $d(z_0, \theta)$ est la demi-droite d'origine z_0 et dirigée par $\vec{u}_\theta$.

On choisit alors la détermination du logarithme définie sur le plan complexe privé de la demi-droite d'origine 0 et dirigée par le vecteur d'affixe :

$$e^{i\left(\pi+\frac{1}{m}\left(\arg\delta+\pi(j+\frac{1}{2})\right)\right)}.$$

On aura ainsi un logarithme complexe $\ln_j$ holomorphe sur le domaine sectoriel $DS_j(r, R, \delta)$ et on aura donc une solution à l'équation différentielle précédente. On obtient donc un difféomorphisme Ψ_j holomorphe sur $DS_j(r, R, \delta)$ qui envoie NF_α sur $NF_{\alpha'}$.

Le difféomorphisme ainsi obtenu est alors de la forme : $\Psi_j(x, z) = (xt^a, zt^b)$ où $a := C$, où b est tel que $(p-q)a + pb = 0$ et où le logarithme choisi pour écrire les fonctions puissances étant $\ln_j$. Et étant donnée :

$$NF_\alpha = x(\lambda + \alpha_1 t^m)\frac{\partial}{\partial x} + z((1-\lambda) + \alpha_2 t^m)\frac{\partial}{\partial z}$$

la forme normale $NF_{\alpha'} := {\Psi_j}_* NF_\alpha$ est alors égale à :

$$NF_{\alpha'} = x(\lambda + [\alpha_1 + a\beta]t^m)\frac{\partial}{\partial x} + z((1-\lambda) + [\alpha_2 + b\beta]t^m)\frac{\partial}{\partial z}$$

Cette forme normale est liouvillienne si et seulement si

$$\alpha_1' + \alpha_2' + m((p-q)\alpha_1' + p\alpha_2') = 0$$

où $\alpha_1' := \alpha_1 + a\beta$ et $\alpha_2' := \alpha_2 + b\beta$. Et cette dernière égalité se prouve en écrivant que :

$$a = C = -\lambda\frac{(\alpha_1 + \alpha_2 + m\beta)}{\beta}$$

De plus, la forme normale $NF_{\alpha'}$ ne dépend pas de l'entier j. Ce qui achève la démonstration du lemme.

Preuve du théorème 4 : Le champ X est analytiquement équivalent à un champ de $\mathcal{E}_{m,\lambda,\alpha}$, autrement dit il existe une fonction unité f telle que $f \cdot X$ soit conjugué à un élément de $\mathcal{E}_{m,\lambda,\alpha}$. Et pour tout difféomorphisme Φ_j obtenu par le théorème de normalisation sectoriel, on peut le composer par un autre difféomorphisme Ψ_j obtenu par le lemme 2, pour conjuguer holomorphiquement le champ $f \cdot X$ à une forme normale liouvillienne NF_α sur le domaine sectoriel $DS_j(r, R, \delta)$. Or les champs $f \cdot X$ et X ont le même feuilletage.

Ainsi les feuilletages des champs liouvilliens X et NF_α sont alors holomorphiquement équivalents sur $DS_j(r, R, \delta)$ et ce pour tout j. Si on se donne deux difféomorphismes Φ_j et Φ_k définis respectivement sur $DS_j(r, R, \delta)$ et $DS_k(r, R, \delta)$ alors le difféomorphisme $\Phi_j \circ \Phi_k^{-1}$ laisse le feuilletage invariant sur $DS_j(r, R, \delta) \cap DS_j(r, R, \delta)$.

L'ensemble des couples $(\Phi_j, DS_j(r, R, \delta)$, est alors un atlas sur un voisinage épointé de zéro, qui permet de lire le feuilletage de X sur celui de NF_α. Ainsi sur tout ce voisinage épointé de zéro, les feuilletages de X et de NF_α sont alors équivalents.

On se ramène aux surfaces, $y = g(x,z)$ et $y = xz(\lambda + \gamma t^m)$, où vivent les 1-jets des solutions de (E) et (15) en utilisant les cartes $(x,z) \mapsto (x, g(x,z), z)$ et $(x,z) \mapsto (x, xz(\lambda+\gamma t^m), z)$, et on établit l'équivalence des feuilletages caractéristiques des équations (E) et (15), sur un voisinage épointé de zéro. Ce qui prouve le théorème 4.

6 Dimension supérieure :

6.1 Étude au voisinage d'un point singulier :

On considère une équation de la forme :

$$F(x_1, ..., x_n, y, \frac{\partial y}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial y}{\partial x_n}) = 0$$

avec $n \geq 2$ et F une fonction sur $\mathbb{C}^{2n+1}$ à valeurs complexes. Ou encore :

$$\left\{ \begin{array}{l} F(x_1, ..., x_n, y, z_1, ..., z_n) = 0 \\ \\ \Omega := dy - \sum_{i=1}^n z_i dx_i = 0. \end{array} \right. \tag{17}$$

On note S la surface de $\mathbb{C}^{2n+1}$ d'équation $F(x_1, ..., x_n, y, z_1, ..., z_n) = 0$. On se place au voisinage d'un point p de S où le plan tangent T_pS coïncide avec l'hyperplan de contact $\ker(\Omega(p))$, c'est à dire :

$$dF(p) \wedge \Omega(p) = 0$$

ce qui équivaut à :

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}(p) + \frac{\partial F}{\partial y}(p) z_i \right) dx_i \wedge dy + \sum_{1 \leq i,j \leq n,\ i \neq j} \left(z_i \frac{\partial F}{\partial x_j}(p) \right) dx_i \wedge dx_j = 0$$

De plus, comme l'hyperplan $\ker(\Omega(p))$ contient toutes les directions $\left(\frac{\partial}{\partial z_i}\right)_{1 \leq i \leq n}$ on a alors $\frac{\partial F}{\partial z_i}(p) = 0$ pour tout i.

Certaines transformations de contact permettent de simplifier ces équations :

Transformations de Legendre : Il est possible d'échanger x_i et z_i pour n'importe quel i en utilisant des applications de Legendre. Par exemple si on souhaite échanger les variables x_j et z_j pour j appartenant à un sous-ensemble J de $\{1, ..., n\}$ on utlisera l'application :

$$L_J : (x_1, ..., x_n, y, z_1, ..., z_n) \mapsto (X_1, ..., X_n, Y, Z_1, ..., Z_n)$$

$$\text{où } X_j = \left\{ \begin{array}{ll} -z_j & \text{si } j \in J \\ x_j & \text{sinon} \end{array} \right. , \quad Y = y - \sum_{j \in J} z_j x_j, \ \text{ et } \ Z_j = \left\{ \begin{array}{ll} x_j & \text{si } j \in J \\ z_j & \text{sinon} \end{array} \right.$$

On peut vérifier que ces applications sont bien des transformations de contact.

Translation : Pour tout point $p : (x_1(p), ..., x_n(p), y(p), z_1(p), ..., z_n(p))$, on définit l'application $(x_1, ..., x_n, y, z_1, ..., z_n) \mapsto (X_1, ..., X_n, Y, Z_1, ..., Z_n)$ où pour tout $1 \leq j \leq n$:

$$X_j = x_j - x_j(p), \quad Y = y - y(p) - \sum_{k=1}^{n} z_k(p)(x_k - x_k(p)), \quad Z_j = z_j - z_j(p).$$

On peut ainsi se ramener en 0 et dans ce cas les équations du point p deviennent :

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(0) = \frac{\partial F}{\partial z_i}(0) = 0, \text{ pour } 1 \leq i \leq n.$$

Si on suppose que 0 n'est pas un point critique de F on a alors $\frac{\partial F}{\partial y}(0) \neq 0$ et d'après le théorème des fonctions implicites le système (17) se réécrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} y = g(x_1, ..., x_n, z_1, ..., z_n) \\ \\ \Omega := dy - \sum_{i=1}^{n} z_i dx_i = 0. \end{array} \right. \tag{18}$$

Mais alors $\Omega = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial g}{\partial x_k} - z_k \right) dx_k + \frac{\partial g}{\partial z_k} dz_k$. On définit donc le champs de vecteurs liouvillien :

$$X := \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial z_k} \frac{\partial}{\partial x_k} + \left(z_k - \frac{\partial g}{\partial x_k} \right) \frac{\partial}{\partial z_k}$$

Ce champ est somme du champ liouvillien $S_0 = \sum_{k=1}^{n} z_k \frac{\partial}{\partial z_k}$ et du champ hamiltonien X_g de la fonction g.

La proposition suivante est une adaptation du résultat de Manouchehri (proposition 1) en dimension supérieure. Elle se démontre de manière analogue.

Proposition 5. *On considère deux germes d'équations :*

$$\left\{ \begin{array}{l} S_1 : y = g_1(x, z) \\ dy - \sum_{k=1}^{n} z_k dx_k = 0 \end{array} \right. \quad \textit{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} S_2 : Y = g_2(X, Z) \\ dY - \sum_{k=1}^{n} Z_k dX_k = 0 \end{array} \right.$$

dont on déduit les germes de champ de vecteurs liouvilliens X_1 et X_2 correspondants.

Soit Φ un germe de biholomorphisme de contact de $\mathbb{C}^{2n+1}$ qui envoie le germe de surface $(S_1, 0)$ sur le germe de surface $(S_2, 0)$ et qui préserve la forme de contact $\Omega = dy - \sum_{k=1}^{n} z_k dx_k$. Alors $\varphi := \pi_* \Phi|_{S_1}$ (où π est la projection de $\mathbb{C}^{2n+1}$ sur $\mathbb{C}^{2n}$, $(x_1, ..., x_n, y, z_1, ..., z_n) \mapsto (x_1, ..., x_n, z_1, ...z_n)$) est un germe de biholomorphisme symplectique de $\mathbb{C}^{2n}$ qui envoie X_1 sur X_2.

Réciproquement, tout germe de difféomorphisme symplectique φ de $\mathbb{C}^{2n}$ qui envoie le champ X_1 sur le champ X_2 se relève par π en un unique germe de difféomorphisme Φ de $\mathbb{C}^{2n+1}$ qui non seulement envoie $(S_1, 0)$ sur $(S_2, 0)$ mais aussi qui préserve la forme de contact Ω.

On suppose que la partie linéaire de X est diagonalisable. Dans ce cas le champ X est conjugué à un champ de la forme $S + R_h$ où R_h est le champ hamiltonien d'une fonction h d'ordre supérieure ou égal à 3 et :

$$S = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \frac{\partial}{\partial x_k} + (1 - \lambda_k) z_k \frac{\partial}{\partial z_k}$$

où les $\lambda_1, ..., \lambda_n, (1-\lambda_1), ..., (1-\lambda_n)$ sont les valeurs propres de la partie linéaire de X, toutes différentes de $\frac{1}{2}$. Et d'après la proposition (4), X est même symplectiquement conjugué à $S + R_h$ dont l'équation correspondante est :

$$\begin{cases} y = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k z_k + h(x,z) \\ \Omega = dy - \sum_{k=1}^{n} z_k dx_k = 0 \end{cases} \tag{19}$$

D'après la proposition (5), on en déduit que le système (18) est équivalent au système (19) lui même équivalent à un système de la forme :

$$\begin{cases} y = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}(z_k^2 + \chi_k x_k^2) + ... \\ \Omega = dy - \sum_{k=1}^{n} z_k dx_k = 0 \end{cases} \tag{20}$$

où "..." désigne des termes d'ordre supérieurs à trois. Il suffit d'appliquer la transformation :

$$\begin{array}{l} X_i = \frac{1}{1-2\lambda_i} \cdot x_i + z_i \\ Y = y + \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{2(1-2\lambda_k)^2} \cdot x_k^2 + \frac{\lambda_k}{1-2\lambda_k} \cdot x_k z_k + \frac{1-\lambda_k}{2} \cdot z_k^2 \\ Z_i = \frac{\lambda_i}{1-2\lambda_i} \cdot x_i + (1-\lambda_i) \cdot z_i \end{array}$$

Les $\chi_k = \lambda_k(1-\lambda_k)$ sont appelés les *invariants dynamiques* de l'équation.

6.2 Formes normales :

On note S_λ le champ de vecteur suivant :

$$S_\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i} - \lambda_i z_i \frac{\partial}{\partial z_i}$$

Et on a $S = S_0 + S_\lambda$ ou S_0 est le champ liouvillien $\sum_{i=1}^{n} z_i \frac{\partial}{\partial z_i}$.

Le crochet de Lie de deux champs de vecteurs liouvilliens est un champ de vecteurs hamiltonien (car $\mathcal{L}_{[X,Y]}\omega = \mathcal{L}_X \mathcal{L}_Y \omega - \mathcal{L}_Y \mathcal{L}_X \omega = \omega - \omega = 0$). Plus précisément :

Lemme 3. *Si on se donne deux champs liouvilliens :*

$$X_1 := \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial z_k} \frac{\partial}{\partial x_k} + \left(z_k - \frac{\partial g}{\partial x_k} \right) \frac{\partial}{\partial z_k} = S_0 + H_g$$

$$et \;\; X_2 := \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial h}{\partial z_k} \frac{\partial}{\partial x_k} + \left(z_k - \frac{\partial h}{\partial x_k} \right) \frac{\partial}{\partial z_k} = S_0 + H_h$$

alors le crochet de Lie $[X_1, X_2]$ est le champ hamiltonien de la fonction :

$$\{g,h\} + (g-h) - \mathcal{L}_{S_0}(g-h)$$

Preuve : Tout d'abord on a : $[X_1, X_2] = [S_0, H_{h-g}] + H_{\{g,h\}}$. Calculons le premier terme :
$[S_0, H_{h-g}] = [H_{g-h}, S_0] = \sum_{i=1}^n [H_{g-h}, z_i \frac{\partial}{\partial z_i}]$

$$= \sum_{i=1}^n \left(z_i \underbrace{\left[H_{g-h}, \frac{\partial}{\partial z_i} \right]}_{=:A_i} + \underbrace{\mathcal{L}_{H_{g-h}}(z_i) \frac{\partial}{\partial z_i}}_{=:B_i} \right)$$

Calculons d'abord B_i :

$$B_i = \mathcal{L}_{H_{g-h}}(z_i) \frac{\partial}{\partial z_i} = -\frac{\partial(g-h)}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial z_i}.$$

Puis A_i :

$$A_i = \left[H_{g-h}, \frac{\partial}{\partial z_i} \right] = -\left[\frac{\partial}{\partial z_i}, H_{g-h} \right]$$
$$= -\sum_{j=1}^n \left(\left[\frac{\partial}{\partial z_i}, \frac{\partial(g-h)}{\partial z_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \right] - \left[\frac{\partial}{\partial z_i}, \frac{\partial(g-h)}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial z_j} \right] \right)$$

Pour le premier terme on a :

$$\left[\frac{\partial}{\partial z_i}, \frac{\partial(g-h)}{\partial z_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \right] = \frac{\partial(g-h)}{\partial z_j} \underbrace{\left[\frac{\partial}{\partial z_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right]}_{=0} + \frac{\partial^2(g-h)}{\partial z_i \partial z_j} \frac{\partial}{\partial x_j}$$

Et pour le second :

$$\left[\frac{\partial}{\partial z_i}, \frac{\partial(g-h)}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial z_j} \right] = \frac{\partial(g-h)}{\partial x_j} \underbrace{\left[\frac{\partial}{\partial z_i}, \frac{\partial}{\partial z_j} \right]}_{=0} + \frac{\partial^2(g-h)}{\partial z_i \partial x_j} \frac{\partial}{\partial z_j}$$

Ainsi, A_i est le champ hamiltonien de la fonction $-\frac{\partial(g-h)}{\partial z_i}$. On a donc :

$$[S_0, H_{h-g}] = -\sum_{1 \le i,j \le n} \left(z_i \frac{\partial^2(g-h)}{\partial z_i \partial z_j} \frac{\partial}{\partial x_j} - z_i \frac{\partial^2(g-h)}{\partial z_i \partial x_j} \frac{\partial}{\partial z_j} \right) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial(g-h)}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial z_i}$$
$$= -\sum_{1 \le i,j \le n} \left(\frac{\partial \left(z_i \frac{\partial(g-h)}{\partial z_i} \right)}{\partial z_j} \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial \left(z_i \frac{\partial(g-h)}{\partial z_i} \right)}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial z_j} \right)$$
$$+ \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial(g-h)}{\partial z_i} \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial(g-h)}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial z_i} \right)$$

Donc $[S_0, H_{h-g}]$ est l'hamiltonien de la fonction :

$$(g-h) - \sum_{i=1}^n z_i \frac{\partial(g-h)}{\partial z_i} = (g-h) - \mathcal{L}_{S_0}(g-h)$$

Ce qui prouve le lemme.

Soit r une fonction d'ordre supérieur ou égal à 3. On pose $h(x,z) = \sum_k \lambda_k x_k z_k$ et $g(x,z) = h(x,z) + r(x,z)$. Si on applique le lemme (3) pour les fonctions g et h, on obtient la fonction :

$$r - \mathcal{L}_S(r)$$

Car $(g-h) = r$ et $\{g,h\} = -\mathcal{L}_{S_\lambda}(r)$. On peut donc donner une définition plus précise des formes normales pour les équations différentielles implicites :

Définition : Un système de la forme :

$$\begin{cases} y = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k z_k + r(x,z) \\ \\ \Omega = dy - \sum_{k=1}^{n} z_k dx_k = 0 \end{cases}$$

où r est une fonction d'ordre supérieur ou égal à 3, est *une forme normale* si et seulement si :

$$\mathcal{L}_S(r) = r$$

Par exemple si r est un monôme $x^I z^J := x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n} z_1^{j_1} \cdots z_n^{j_n}$ alors c'est un monôme résonnant si :

$$(\lambda, I) + ((1-\lambda), J) := \sum_{k=1}^{n} \lambda_k i_k + (1-\lambda_k) j_k = 1$$

avec $|I| + |J| \geq 3$.

Définition : Deux systèmes implicites :

$$(E_1) \ : \ \begin{cases} S_1 : F_1(x_1, ..., x_n, y, z_1, ..., z_n) = 0 \\ dy - \sum_{k=1}^{n} z_k dx_k = 0 \end{cases}$$

$$\text{et} \quad (E_2) \ : \ \begin{cases} S_2 : F_2(X_1, ..., X_n, Y, Z_1, ..., Z_n) = 0 \\ dY - \sum_{k=1}^{n} Z_k dX_k = 0 \end{cases}$$

sont dit équivalents (respectivement, formellement équivalents) s'il existe un germe de biholomorphisme (respectivement, un difféomorphisme formel) $\varphi(x_1, ..., x_n, y, z_1, ..., z_n) = (X_1, ..., X_n, Y, Z_1, ...Z_n)$ de $\mathbb{C}^{2n+1}$ qui envoie le germe de surface S_1 sur le germe de surface S_2 et qui préserve la structure de contact, c'est à dire tel que $(dY - \sum_{k=1}^{n} Z_k dX_k) \wedge (dy - \sum_{k=1}^{n} z_k dx_k) = 0$. On écrira alors $E_1 \sim E_2$.

Définition : Un système de la forme (20) est dit normalisable (respectivement formellement normalisable) s'il est équivalent (respectivement formellement équivalent) à une forme normale.

Dans ce cas, avec les notations précédentes, le champ liouvillien associé à cette équation sous forme normale est : $NF = S_0 + S_\lambda + H_r$ où H_r est le champ hamiltonien de cette fonction r. Et ce champ est une forme normale du champ liouvillien associé au système initial.

Proposition 6. *La proposition 3 se généralise en dimension supérieure :*
Soit X un champ de vecteurs holomorphe sur $(\mathbb{C}^n, 0)$ de partie linéaire $S = S_0 + S_\lambda$. Alors X est symplectiquement formellement normalisable.

Preuve : La démonstration est strictement analogue à la proposition 3. En reprenant les mêmes notations, l'équation homogène à résoudre est $[S, H_u] = H_v$ où $S = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i} - (1-\lambda_i) z_i \frac{\partial}{\partial z_i}$ et H_u, H_v sont les champs hamiltoniens respectifs de polynômes homogènes u et v. On pose $h(x,z) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i z_i$ et :

$$[S, H_u] = H_{h,u} + \sum_{l=1}^{n} \left(\left[\sum_{k=1}^{n} z_k \frac{\partial^2 u}{\partial z_k \partial z_l} \right] \frac{\partial}{\partial x_l} + \left[\frac{\partial u}{\partial x_l} - \sum_{k=1}^{n} z_k \frac{\partial^2 u}{\partial z_k \partial x_l} \right] \frac{\partial}{\partial z_l} \right).$$

Donc ce champ est l'hamiltonien de la fonction :

$$\{h, u\} + \sum_{k=1}^{n} z_k \frac{\partial u}{\partial z_k} - u$$

Ainsi l'équation homogène associée équivaut à :

$$\mathcal{L}_S(u) - u = v$$

Donc en posant $u = \sum_{(I,J)} u_{IJ} x^I z^J$ et $v = \sum_{(I,J)} v_{IJ} x^I z^J$ on obtient :

$$((\lambda, I) + ((1-\lambda), J) - 1) u_{IJ} = v_{IJ}$$

Pour construire le difféomorphisme symplectique qui résout l'équation homogène il suffit alors de prendre :

$$u_{IJ} = \frac{v_{IJ}}{((\lambda, I) + ((1-\lambda), J) - 1)} \quad \text{si} \quad ((\lambda, I) + ((1-\lambda), J) - 1) \neq 0$$

$$\text{et} \quad u_{IJ} = 0 \quad \text{sinon.}$$

6.3 Domaine de Poincaré :

Contrairement aux champs hamiltoniens, il existe bien un domaine de Poincaré pour les champs de vecteurs liouvilliens.

En effet, l'ensemble des valeurs propres d'une partie linéaire de champ hamiltonien est une famille de binôme $(\lambda, -\lambda)$, ces deux nombres complexes sont symétriques l'un de l'autre par rapport à 0. Par conséquent l'enveloppe convexe de l'ensemble des valeurs propres contient toujours 0.

Dans le cas d'un champ liouvillien, les binômes sont de la forme $(\lambda, (1-\lambda))$, or λ et $(1-\lambda)$ sont symétriques l'un de l'autre par rapport au point d'affixe $\frac{1}{2}$. Il est donc tout à fait possible d'avoir une enveloppe convexe des valeurs propres qui ne contient pas 0. Cette configuration certifie donc l'existence de champs liouvilliens dont le n-uplet des valeurs propres appartient au domaine de Poincaré.

Dans cette section, on établit une condition sur les invariants dynamiques de l'équation implicite pour que le champ liouvillien associé soit soumis aux hypothèses du théorème de Poincaré.

Théorème 5. *On considère un système (E) de la forme (20) :*

$$(E) \;:\; \begin{cases} y = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2}(z_j^2 + \chi_j x_j^2) + ... \\ \\ \Omega = dy - \sum_{j=1}^{n} z_j dx_j = 0 \end{cases}$$

On pose $\chi_j = \rho_j e^{i\theta_j}$ et on définit pour tout $\sigma \in \mathbb{R}$ la fonction :

$$f_\sigma \; : \; \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}, \; \theta \mapsto \frac{(1+\sigma^2)(\cos(\theta) - \sigma \sin(\theta))}{(2\sigma\cos(\theta) + (1-\sigma^2)\sin(\theta))^2}$$

S'il existe $\sigma \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $1 \leq j \leq n$ on a $f_\sigma(\theta_j) > \rho_j > 0$ alors (E) est biholomorphiquement normalisable en une forme normale polynomiale.

Les fonctions f_σ définissent des équations polaires de paraboles et donnent un critère d'appartenance au domaine de Poincaré. Si les invariants dynamiques χ_j sont tous contenus "à l'intérieur" d'une des paraboles définies par les fonctions f_σ (c'est à dire dans la composante connexe convexe de son complémentaire dans le plan), alors le champ liouvillien associé à (E) sera normalisable.

Exemple : On considère l'équation :

$$\left\{ \begin{array}{l} y = \frac{1}{2}(z_1^2 + \frac{2}{9}x_1^2) + \frac{1}{2}(z_2^2 + x_2^2) + ... \\ \Omega = 0 \end{array} \right. \tag{21}$$

où ... désigne des termes d'ordres supérieurs à trois. Les invariants dynamiques sont $\chi_1 = \frac{2}{9}$ et $\chi_2 = 1$ et ce système est équivalent en zéro à :

$$\left\{ \begin{array}{l} y = \frac{1}{3}x_1 z_1 + j x_2 z_2 + ... \\ \Omega = 0 \end{array} \right.$$

où $j = e^{i\frac{\pi}{3}}$; x_1^3 est ici le seul terme résonnant. Les hypothèses du théorème 5 s'appliquent en choisissant $\sigma = 0$ (i.e. la parabole choisie est d'équation $x = y^2$). D'après le théorème 5 l'équation (21) se normalise sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} y = \frac{1}{3}x_1 z_1 + j x_2 z_2 + x_1^3 \\ \Omega = 0 \end{array} \right.$$

$$\sim \left\{ \begin{array}{l} y = \frac{1}{2}(z_1^2 + \frac{2}{9}x_1^2) + \frac{1}{2}(z_2^2 + x_2^2) + (\frac{2}{3}x_1 - z_1)^3 \\ \Omega = 0 \end{array} \right.$$

Plus généralement lorsque les invariants dynamiques sont des réels strictement positifs, la parabole choisie avec $\sigma = 0$ convient toujours. Ce type d'équation implicite est alors toujours normalisable.

Autre exemple : Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on considère le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} y = \sum_{j=1}^n \frac{1}{2}\left(z_j^2 + \left(\frac{1}{4} + i2(j - \frac{1}{2})^2\right) x_j^2\right) + ... \\ \\ \Omega = 0 \end{array} \right. \tag{22}$$

où ... désigne des termes d'ordres supérieurs à trois et $i^2 = -1$. Les invariants dynamiques sont $\chi_j = \rho_j e^{i\theta_j} = \frac{1}{4} + i2(j - \frac{1}{2})^2$. Les valeurs propres du champ liouvillien associé sont alors $(\lambda_j, 1 - \lambda_j)_{1 \leq j \leq n}$ où $\lambda_j = (1-j) + i(j - \frac{1}{2})$. Avec de telles valeurs propres il n'y a aucune résonance. En effet, il suffit de regarder leur projection sur la droite dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u} = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ pour voir qu'une relation $(P, \lambda) + (Q, 1 - \lambda) = 1$ n'est pas réalisable lorsque $|P| + |Q| \geq 3$. Sur cette droite, 1 est projeté sur l'affixe du vecteur $2\overrightarrow{u}$ et tous les λ_j sont projetés sur l'affixe du vecteur $\overrightarrow{u}$; ainsi $(P,\lambda)+(Q,1-\lambda)$ est projeté sur l'affixe du vecteur $(|P|+|Q|)\cdot\overrightarrow{u}$, ce rend impossible toute relation de résonance dès que $|P|+|Q|\geq 3$.

Pour appliquer le théorème (5) on choisit $\sigma=-1$ (i.e. la parabole d'équation $y=2x^2-x$). On calcule alors $f_{-1}(\theta_j)$, sachant que $\cos(\theta_j)=\frac{1}{4\rho_j}$ et $\sin(\theta_j)=\frac{2}{\rho_j}(j-\frac{1}{2})^2$.

$$f_{-1}(\theta_j)=\frac{\frac{1}{4\rho_j}+\frac{2}{\rho_j}(j-\frac{1}{2})^2}{2(\frac{1}{4\rho_j})^2}=\rho_j\left(2+16\left(j-\frac{1}{2}\right)^2\right)>\rho_j$$

Ainsi pour tout j, $f_{-1}(\theta_j)>\rho_j>0$ et par conséquent le système (22) est équivalent à :

$$\left\{\begin{array}{l} y=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2}\left(z_j^2+\left(\frac{1}{4}+i2(j-\frac{1}{2})^2\right)x_j^2\right) \\ \\ \Omega=0 \end{array}\right.$$

Preuve du théorème 5 : Soit X le champ liouvillien associé à (E), et soit $(\lambda_1,...,\lambda_n,1-\lambda_1,...,1-\lambda_n)$ les valeurs propres de la partie linéaire X_1 de X (que l'on suppose tous différents de $\frac{1}{2}$. Le n-uplet $(\lambda_1,...,\lambda_n,1-\lambda_1,...,1-\lambda_n)$ appartient au domaine de Poincaré s'il existe une droite D du plan, passant par 0 telle que tous les points d'affixes $\lambda_1,...,\lambda_n,1-\lambda_1,...,1-\lambda_n$ soient tous strictement contenus dans un des deux demi-plans ouverts délimités par D.

Or, si μ est une valeurs propres de X_1, son symétrique par rapport au point d'affixe $\frac{1}{2}$: $1-\mu$ est aussi valeur propre. On peut donc écarter le cas où D est la droite horizontale d'équation $y=0$, car $\mathcal{I}m(\mu)$ et $\mathcal{I}m(1-\mu)$ sont opposés l'un de l'autre, on écrira donc $x=\sigma y$ pour l'équation de D que l'on notera désormais D_σ ; d'autre part, les points sont tous à droite de D_σ (i.e. $x>\sigma y$), car si μ était à gauche de D_σ alors $1-\mu$ serait à droite et le n-uplet des valeurs propres ne serait pas dans le domaine de Poincaré ; enfin, si les points sont tous à droite de D_σ alors il sont également tous à gauche de la droite $\tilde{D_\sigma}$ d'équation $x=\sigma y+1$.

Ainsi, dire que $(\lambda_1,...,\lambda_n,1-\lambda_1,...,1-\lambda_n)$ appartient au domaine de Poincaré, revient à dire que les points d'affixes $\lambda_1,...,\lambda_n,1-\lambda_1,...,1-\lambda_n$ sont contenus strictement à l'intérieur de la bande T_σ délimitée par les droites parallèles D_σ et $\tilde{D_\sigma}$.

Soit $\tilde{\chi}:\mathbb{C}\to\mathbb{C}, z\mapsto z(1-z)$. On a donc $\tilde{\chi}(x+iy)=[y^2-x^2+x]+i[y(1-2x)]$ et pour tout $z\in\mathbb{C}$ on a $\tilde{\chi}(z)=\tilde{\chi}(1-z)$, donc $\tilde{\chi}(D_\sigma)=\tilde{\chi}(\tilde{D_\sigma})$. On se donne une paramétrisation de D_σ :

$$\left\{\begin{array}{l} x(t)=\sigma t \\ y(t)=t \end{array}\right.$$

Alors $\tilde{\chi}(D_\sigma)$ est la parabole $\mathcal{P}_\sigma$ d'équation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{l} x(t)=(1-\sigma^2)t^2+\sigma t \\ y(t)=-2\sigma t^2+t \end{array}\right.$$

et dire qu'un point d'affixe z appartient à la bande ouverte T_σ revient à dire que le point d'affixe $\tilde{\chi}(z)$ appartient à "l'intérieur" de la parabole $\mathcal{P}_\sigma$.

L'équation cartésienne de $\mathcal{P}_\sigma$ est :

$$4\sigma^2x^2 + 4\sigma(1-\sigma^2)xy + (1-\sigma^2)^2y^2 - (1+\sigma^2)x + \sigma(1+\sigma^2)y = 0.$$

Et son équation polaire est :

$$\rho(\theta) = \frac{(1+\sigma^2)(\cos(\theta) - \sigma\sin(\theta))}{(2\sigma\cos(\theta) + (1-\sigma^2)\sin(\theta))^2}$$

Ainsi, le n-uplet $(\lambda_1, ..., \lambda_n, 1-\lambda_1, ..., 1-\lambda_n)$ des valeurs propres de X_1 appartient au domaine de Poincaré si et seulement si les points d'affixes $\chi_j = \lambda_j(1-\lambda_j) = \rho_j e^{i\theta_j}$ sont à l'intérieur d'une parabole $\mathcal{P}_\sigma$ pour un certain $\sigma \in \mathbb{R}$, c'est à dire s'il existe un réel σ tel que $f_\sigma(\theta_j) > \rho_j > 0$ pour tout $1 \leq j \leq n$.

Sous les hypothèses du théorème 5, le n-uplet des valeurs propres de la partie linéaire du champs liouvillien X associé à (E) appartient bien au domaine de Poincaré.

Et donc d'après le théorème de Poincaré, le champs X se normalise holomorphiquement en une forme normale polynomiale NF.

Or d'après la proposition 6, X est formellement symplectiquement normalisable en une forme normale liouvillienne NF_l, mais comme dans le domaine de Poincaré il y a un nombre fini de résonances NF_l est polynomiale.

Il est possible de conjuguer NF à NF_l en utilisant un difféomorphisme de la forme $\varphi = (Id + U)$, où U est constitué uniquement de termes résonnants, ce qui implique que φ est polynomiale donc holomorphe.

Ainsi, les champs liouvilliens X et NF_l sont holomorphiquement conjugués, et donc d'après la proposition 4, ils sont symplectiquement conjugués. Et donc par la proposition 5, (E) se normalise en une forme normale polynomiale.

7 Existences de solutions :

La proposition 2 établit l'existence de solutions sous certaines conditions sur le point initial, pour une équation implicite de la forme (7). Or, d'après la proposition 1, une équation différentielle implicite dont le champ liouvillien associé se linéarise, est équivalente à son équation implicite élémentaire associée. On peut donc établir l'existence de solutions locales, grâce aux différents théorèmes de linéarisation.

Il n'est pas nécessaire que le champ soit linéarisable pour obtenir des propriétés topologiques sur le système initial, en revanche dans le cas favorable de linéarisation, il est possible de transporter directement les propriétés analytiques, $\mathcal{C}^\infty$ ou $\mathcal{C}^k$ du système élémentaire sur le système initial.

7.1 Cas complexe :

On considère un système implicite de la forme :

$$\begin{cases} y = g(x,z) \\ dy - zdx = 0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

On pose :

$$\chi := \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial z}(0)\left(1 - \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial z}(0)\right) + 4\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(0)\frac{\partial^2 g}{\partial z^2}(0)$$

$$\Gamma = \left\{\frac{\partial g}{\partial z} = 0\right\}, \quad \Delta := \pi_* \Gamma$$

où π est la projection $(x, y, z) \mapsto (x, y)$.

On définit alors Λ, l'ensemble de toutes les valeurs possibles de χ telle que le champ liouvillien associé à l'équation implicite soit holomorphiquement linéarisable (il le sera alors symplectiquement d'après la proposition 4). Alors d'après la proposition 2, on a :

Proposition 7. *Si $\chi \in \Lambda$, l'équation $y = g(x, y')$, $y(x_0) = y_0$, admet 2 solutions locales si $(x_0, y_0) \notin \Delta$, et n'admet pas de solution dans le cas contraire, mais si $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ il existe une courbe complexe passant par (x_0, y_0) contenant deux solutions locales qui se réunissent en ce point.*

De plus, d'après le théorème 1, on sait déjà que l'ensemble :

$$(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}) \ \cup \ ]\frac{1}{4}, +\infty[\ \cup \ \left\{\chi \in]0, \frac{1}{4}[\ \mid \ \forall q \in \mathbb{N}^*, \ \ \chi \neq \frac{q-1}{q^2}\right\}$$

est inclus dans Λ. Et d'après les théorèmes 2 et 3, on sait qu'on peut trouver d'autre valeurs de χ qui rendent le champ X_g linéarisable et qui vérifient la proposition 7.

7.2 Cas réel :

La proposition 1 est toujours valable dans le cas réel analytique (voir [Man96]), ainsi que la proposition 4. Ainsi pour obtenir l'existence de solution d'une équation implicite de la forme (5), il nous faut un théorème de linéarisation du champ liouvillien associé. Dans ce cas, l'existence de solutions réelles, étudiées par [Dar75] (pli foyer, pli noeud, pli col), permettra d'établir l'existence de solution de l'équation implicite.

Linéarisation $\mathcal{C}^\infty$: Lorsqu'il n'y a pas de résonance, pour linéariser le champ X en classe $\mathcal{C}^\infty$, on peut utiliser le théorème de Sternberg suivant :

Théorème (Sternberg : [Ste58]). *Soit X un champ de vecteur réel de classe $\mathcal{C}^\infty$. Soient $\lambda_1, ..., \lambda_n$ les valeurs propres de la partie linéaires de X. On suppose que pour tout $1 \leq i \leq n$, $\mathcal{R}e(\lambda_i) \neq 0$ et :*

$$\lambda_i \neq \sum_{k=1}^{n} m_k \lambda_k, \quad \textit{pour tout } (m_k)_{1 \leq k \leq n} \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=1}^{n} m_k > 1$$

Alors X est linéarisable par un changement de coordonnées $\mathcal{C}^\infty$.

Sous les hypothèses du théorème de Sternberg, l'équation implicite (5) est localement équivalente à l'équation élémentaire (7) et par conséquent les propriétés d'existence de solutions locales seront les mêmes.

Linéarisation $\mathcal{C}^k$: Lorsqu'il n'y a pas de résonance d'ordre en dessous d'un certain degré $N \in \mathbb{N}^*$, on utilise un théorème de linéarisation de Sternberg en classe $\mathcal{C}^k$.

Théorème (Sternberg : [Ste57]). *Soit X un champ de vecteur réel de classe $\mathcal{C}^\infty$. Soient $\lambda_1, ..., \lambda_n$ les valeurs propres de la partie linéaires de X. On suppose que pour tout $1 \leq i \leq n$, $\mathcal{R}e(\lambda_i) \neq 0$ et :*

$$\lambda_i \neq \sum_{k=1}^{n} m_k \lambda_k, \quad \textit{pour tout } (m_k)_{1 \leq k \leq n} \in \mathbb{N}, \quad 2 \leq \sum_{k=1}^{n} m_k \leq N$$

Alors X est linéarisable par un changement de coordonnées $\mathcal{C}^k$, où :

$$k > \frac{\max |\mathcal{R}e(\lambda_i)|}{\min |\mathcal{R}e(\lambda_i)|}$$

Ce théorème donnera une équivalence des équations implicites (5) et (7) en classe $\mathcal{C}^k$. Par conséquent les solutions existantes de l'équation (7) seront envoyées sur des solutions de classe $\mathcal{C}^k$ de l'équation (5).

Tout ceci nous permet alors d'établir le corollaire suivant :

Corollaire 1. *On considère le système implicite $y = g(x, z)$, $dy - zdx = 0$ et on pose :*

$$\chi := \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial z}(0) \left(1 - \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial z}(0)\right) + 4 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(0) \frac{\partial^2 g}{\partial z^2}(0).$$

Alors :

I. *Si $\chi > \frac{1}{4}$, la dynamique du système est de type pli-foyer et les solutions locales au voisinage des points où elles existent sont de classe $\mathcal{C}^\infty$.*

II. *Si $\chi \in]0, \frac{1}{4}[$, alors la dynamique du système est de type pli-noeud et :*

- **a)** *Si $\forall q \in \mathbb{N}$, $q > 2, \chi \neq \frac{q-1}{q^2}$ alors les solutions locales au voisinage des points où elles existent sont de classe $\mathcal{C}^\infty$.*
- **b)** *S'il existe un entier q tel que $\chi = \frac{q-1}{q^2}$ alors, si $q > 3$ les solutions locales au voisinage des points où elles existent sont de classe $\mathcal{C}^2$.*

III. *Si $\chi < 0$, alors la dynamique du système est de type pli-col et :*

- **a)** *Si pour tout entiers p et q tels que $p > q > 0$ ou $p < 0 < q$, on a $\chi \neq \frac{p(q-p)}{q^2}$ alors les solutions locales au voisinage des points où elles existent sont de classe $\mathcal{C}^\infty$.*
- **b)** *S'il existe p et q tels que $p > q > 0$ ou $p < 0 < q$, et tels que $\chi = \frac{p(q-p)}{q^2}$, alors les solutions locales au voisinage des points où elles existent sont de classe $\mathcal{C}^2$.*

Preuve : Pour obtenir l'équivalence locale entre l'équation implicite (E) : $y = g(x, y')$ et son équation élémentaire, il nous faut utiliser un des théorèmes de Sternberg pour linéariser le champ liouvillien associé, puis utiliser les propositions 4 [Cha99] et 1 [Man96] dans le cas réel.

L'hypothèse d'hyperbolicité des théorèmes de Sternberg est équivalente à $\chi \neq 0$ dans le cas réel. Et dans chacun des cas suivants, la régularité de la transformation donne celle des solutions locales lorsque celles-ci existent.

L'étude des résonances a montré que si $\chi > \frac{1}{4}$, il n'y a aucune résonance, donc d'après le théorème de Sternberg le champ liouvillien associé à (E) est linéarisable par une transformation de classe $\mathcal{C}^\infty$. La dynamique du système est donc de même nature que l'équation (7) pour $\chi > \frac{1}{4}$, et est donc de type pli-foyer (voir [Dar75]).

Si $\chi \in]0, \frac{1}{4}[$ et que $\forall q > 2, \chi \neq \frac{q-1}{q^2}$, le premier des deux théorèmes de Sternberg fournit alors une linéarisation $\mathcal{C}^\infty$ du champ, tandis que s'il existe un entier q tel que $\chi = \frac{q-1}{q^2}$, on utilisera le deuxième théorème de Sternberg. Dans le cas présent, la seule résonance possible est d'ordre $q-1$. Il est donc nécessaire de prendre $q > 3$ pour obtenir les conditions de non-résonance jusqu'à l'ordre $q-2 \geq 2$. La transformation linéarisante fournie par le théorème est alors au minimum de classe $\mathcal{C}^2$, ainsi que les solutions locales. Dans tous les cas la dynamique est de type pli-noeud.

Si $\chi < 0$, alors dans le cas où on a $\chi \neq \frac{p(q-p)}{q^2}$ pour tous entiers p et q tels que $p > q > 0$ ou $p < 0 < q$, on utlisera le premier des deux théorèmes de Sternberg, qui donne alors une linéarisation $\mathcal{C}^\infty$ du champ. Si par contre il existe p et q tels que $p > q > 0$ ou $p < 0 < q$, et tels que $\chi = \frac{p(q-p)}{q^2}$, on utlisera le théorème de Sternberg en différentiabilité finie. Les résonances sont d'ordre $1 + k(2p-q), k \in \mathbb{N}^*$, et le seul cas où $1 + k(2p-q) = 2$ équivaut à $k = p = q = 1$ et ce cas est déjà écarté par hypothèse. Dans tous les cas la dynamique est de type pli-col.

Conclusion intermédiaire

La proposition 7 et le corollaire 1 montrent bien l'intérêt des résultats de normalisation. En effet, la connaissance des solutions d'une forme normale d'équation différentielle, nous donne des informations sur les propriétés dynamiques de l'équation différentielle initiale.

Dans ce cas particulier, la connaissance de l'invariant dynamique χ a permis de comprendre la dynamique de l'équation grâce à l'étude de ses formes normales. Par exemple, dans le cas non-résonnant, la connaissance des solutions des équations élémentaires couplée avec un théorème de linéarisation régulière, offre une compréhension d'un grand ensemble de systèmes perturbés ayant les mêmes invariants dynamiques.

Nous avons compris dans cette première partie que le point crucial de la normalisation de ces équations différentielles implicites se trouve dans la normalisation de son champ de vecteur liouvillien associé.

Les résultats obtenus jusqu'alors résultent de l'utilisation de théorèmes de normalisation déjà établis dans la théorie classique (Poincaré, Siegel, Sternberg, Stolovitch) réadaptée dans un cadre symplectique. Le travail sur la convergence des transformations est donc contenu dans ces théorèmes, et il restait à transformer les changements de coordonnées ainsi que les formes normales pour préserver le caractère symplectique de l'environnement.

Nous allons à présent voir de l'intérieur une démonstration de normalisation de champ de vecteurs, dans un cadre plus complexe que la théorie classique. Le champ de vecteur considéré sera donc bien holomorphe selon une famille de variable $(y_1, ..., y_n)$, mais ici, la variété définie par $\{y_1 = ... = y_n = 0\}$ ne sera plus un singleton mais un tore invariant. Les composantes du champs seront alors des fonctions analytiques en Y, mais les coefficients seront eux-même des fonctions analytiques et 2π- périodique en X.

Deuxième partie
Linéarisation au voisinage d'un tore invariant

Préliminaires :

Notations :

- $\mathbf{i} \in \mathbb{C}, \mathbf{i}^2 = -1$.
- $(l,n) \in \mathbb{N}^2$, $1 \leq j \leq l$, $1 \leq i \leq n$.
- $\mathcal{T}^l := (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^l$,
- $\delta > 0, r > 0, D_{\delta,r} := \{(X,Y) \in (\mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z})^l \times \mathbb{C}^l,\ |\mathcal{I}m(X)| < \delta,\ |Y| < r\}$,
- $P := (p_1, ..., p_l) \in \mathbb{Z}^l$,
- $Q := (q_1, ..., q_n) \in \mathbb{N}^n$,
- $E_i := (\delta_{1,i}, ..., \delta_{n,i}) \in \mathbb{N}^n$,
- $X \in (\mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z})^l$,
- $Y \in \mathbb{C}^n$,
- $< P, X >:= p_1x_1 + ... + p_lx_l$,
- $Y^Q := y_1^{q_1} \cdot ... \cdot y_n^{q_n}$,
- $\Omega = (\Omega_1, ..., \Omega_l)$,
- $\Lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$.

Normes :

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{C}^l$, 2π-périodique et analytique au voisinage du tore $\mathcal{T}^l := (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^l$. Pour tout X tel que $|\mathcal{I}m(X)|$ est suffisamment petit on a le développement de f en série de Fourier :

$$f(X) = \sum_{P\in\mathbb{Z}^l} f_P \cdot e^{\mathbf{i}<P,X>}$$

On note $\mathcal{P}_X$ l'ensemble de ces fonctions. Pour tout $\delta > 0$, on pose alors :

$$|f|_\delta := \sum_{P\in\mathbb{Z}^l} |f_P| \cdot e^{|P|\delta}$$

Proposition 8. *Pour tout $\delta > 0$, si on a $|f|_\delta < +\infty$ alors il existe $c \geq \delta$ et $N \geq 0$ tels que pour tout $P \in \mathbb{Z}^l$ tel que $|P| \geq N$ on ait :*

$$|f_P| < e^{-c|P|}$$

Preuve : Supposons que pour tout $c \geq \delta$ et pour tout $N \geq 0$, il existe $P_{c,N} \in \mathbb{Z}^l$ tel que $|P_{c,N}| \geq N$ et $|f_{P_{c,N}}| \geq e^{-c|P_{c,N}|}$.

On choisit $c = \delta$ et $N_0 = 1$, et on construit ainsi P_{δ,N_0} qui vérifie alors $|f_{P_{\delta,N_0}}| \geq e^{-\delta|P_{\delta,N_0}|}$ et $|P_{\delta,N_0}| \geq N_0$. De même, pour tout $k \geq 0$ on choisit

$N_{k+1} = |P_{\delta,N_k}| + 1$ pour construire $P_{\delta,N_{k+1}}$. On aura donc, pour tout entier k : $|f_{P_{\delta,N_k}}| \geq e^{-\delta|P_{\delta,N_k}|}$ et $|P_{\delta,N_{k+1}}| > |P_{\delta,N_k}|$. Ainsi, on a :

$$|f|_\delta := \sum_{P\in\mathbb{Z}^l} |f_P| \cdot e^{|P|\delta} \quad \geq \quad \sum_{k\in\mathbb{N}} |f_{P_{\delta,N_k}}| \cdot e^{|P_{\delta,N_k}|\delta} \quad \geq \quad \sum_{k\in\mathbb{N}} 1 \quad \geq \quad +\infty$$

Ce qui contredit l'hypothèse $|f|_\delta < +\infty$.

Remarque : Si $|f|_\delta < +\infty$, quelque soit $P \in \mathbb{Z}^l$ on a $|f_P| < e^{-\delta|P|} \cdot |f|_\delta$.
Par conséquent si $|f|_\delta < 1$ alors pour tout $P \in \mathbb{Z}^l$, $|f_P| < e^{-\delta|P|}$.

On note $\mathcal{P}_X[[Y]]$ l'anneau des séries formelles de la forme :

$$\hat{f} = \sum_{Q\in\mathbb{N}^n} f_Q(X) \cdot Y^Q$$

où quelque soit Q, $f_Q \in \mathcal{P}_X$. On a donc le développement de "Taylor-Fourier" suivant :

$$\hat{f} = \sum_{Q\in\mathbb{N}^n,\ P\in\mathbb{Z}^l} f_{PQ} \cdot e^{\mathbf{i}<P,X>} Y^Q$$

Pour tout $\delta > 0$ et $r > 0$, on pose alors :

$$|\hat{f}|_{\delta,r} := \sum_{P\in\mathbb{Z}^l,\ Q\in\mathbb{N}^n} |f_{PQ}| \cdot e^{|P|\delta} \cdot r^{|Q|}$$

Si $|\hat{f}|_{\delta,r} < +\infty$, on dit alors que $\hat{f}$ converge et on la note f. On note $\mathcal{P}_X^0[[Y]]$ l'ensemble de ces séries convergentes.

Quasi-homogénéité :

En référence à la définition classique, nous établirons la quasi-homogénéité par rapport au poids $p := (0, ..., 0, 1, ..., 1) \in \mathbb{N}^l \times \mathbb{N}^n$.

Ici, on dira qu'une fonction $f(X,Y) = \sum_{P\in\mathbb{Z}^l,\ Q\in\mathbb{N}^n} f_{PQ} \cdot e^{\mathbf{i}<P,X>} Y^Q$ est quasi-homogène de quasi-degré m, si :

$$f_{PQ} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad |Q| = m$$

On dira que f est de quasi-ordre m si :

$$f_{PQ} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad |Q| \geq m$$

Soit $Z := \sum_{j=1}^l X_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^n Y_i \frac{\partial}{\partial y_i}$ un champ de vecteurs tel que pour tout i, j, on ait X_j, $Y_i \in \mathcal{P}_X[[Y]]$. On dit alors que Z est quasi-homogène de quasi-degré m si pour tout j, X_j est quasi-homogène de quasi-degré m et si pour tout i, Y_i est quasi-homogène de quasi-degré $m+1$.

On écrira aussi : $|Z|_{\delta,r} := \max((|X_j|_{\delta,r})_{1\leq j\leq l}, (|Y_i|_{\delta,r})_{1\leq i\leq n})$, ainsi que $|dZ|_{\delta,r} := \max_{1\leq j\leq l,\ 1\leq i\leq n} (|dX_j|_{\delta,r}, |dY_i|_{\delta,r})$, où pour toute fonction f de $\mathcal{P}_X[[Y]]$, on a écrit $|df|_{\delta,r} := \max_{1\leq j\leq l,\ 1\leq i\leq n} \left(\left|\frac{\partial f}{\partial x_j}\right|_{\delta,r}, \left|\frac{\partial f}{\partial y_i}\right|_{\delta,r} \right)$.

Proposition 9. *Soient* $0 < R < r$, *et soit* $f \in \left(\mathcal{P}_X^0[[Y]]\right)^{l+n}$ *de quasi-ordre* m. *Alors on a :*

$$|f|_{\delta,R} \leq \left(\frac{R}{r}\right)^m |f|_{\delta,r}$$

Et pour tout F *et* G *on a :*

$$|dG \circ F|_{\delta,r} \leq (l+n) \cdot |dG|_{\delta,r} \cdot |F|_{\delta,r}$$

Pour tout champ de vecteurs $Z = \sum_{k=1}^{l+n} Z_k \frac{\partial}{\partial z_k}$ et $Z' = \sum_{k=1}^{l+n} Z'_k \frac{\partial}{\partial z_k}$ leur crochet de Lie est égal à :

$$[Z, Z'] = \sum_{i=1}^{l+n} \left(\sum_{j=1}^{l+n} Z_j \frac{\partial Z'_i}{\partial z_j} - Z'_j \frac{\partial Z_i}{\partial z_j} \right) \frac{\partial}{\partial z_i}.$$

Et si Z et Z' sont des champs de vecteurs quasi-homogènes de quasi-degré respectifs σ et σ', alors le crochet de Lie $[Z, Z']$ est quasi-homogène de quasi-degré $\sigma + \sigma'$.

8 Théorème de linéarisation au voisinage du tore invariant

On considère un champ de vecteurs autonome :

$$\dot{Z} = \mathcal{F}(Z), \quad \text{où } Z = (z_1, ..., z_{l+n})$$

analytique sur un domaine $\mathcal{D}$, et réel sur $\mathcal{R}e(\mathcal{D})$. On suppose que le tore de dimension l, $\mathcal{T}^l := (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^l \subset \mathcal{R}e(\mathcal{D})$, est une variété intégrale du système. Nous allons nous intéresser à la dynamique au voisinage du tore. On introduit un système de coordonnées locales : $x_1(Z), ..., x_l(Z), y_1(Z), ..., y_n(Z)$, définies sur un voisinage de $\mathcal{T}^l$, et telles que sur ce tore :

1) $y_1 = ... = y_n = 0$.

2) Le jacobien $\det(\partial(X, Y)/\partial Z)$ ne s'annule pas sur $\mathcal{T}^l$.

3) Les fonctions x_j sont 2π-périodiques : $x_j + 2\pi = x_j$, pour tout $j = 1, ..., l$.

Dans les coordonnées (X, Y) le système initial devient :

$$\begin{cases} \dot{X} = \Theta_1(X, Y) \\ \dot{Y} = \Theta_2(X, Y) \end{cases}$$

Puisque $\mathcal{T}^l$ est une variété invariante, on a $\Theta_2(X, 0) = 0$, et le système restreint au tore s'écrit alors : $\dot{X} = \Theta_1(X, 0)$. On suppose que le champ est constant sur $\mathcal{T}^l$. On peut alors écrire Θ_1 sous la forme :

$$\Theta_1(X, Y) = \Omega + F(X, Y)$$

où $F(X, 0) = 0$ pour tout X, et $\Omega = (\Omega_1, ..., \Omega_l)$. On considère à présent la partie linéaire en Y du second membre :

$$\Theta_2(X, Y) = S(X)Y + G(X, Y), \quad \text{où } G(X, 0) = \partial G/\partial Y(X, 0) = 0$$

On se restreint alors au cas où la matrice S est constante. Le système initial devient alors :

$$\begin{cases} \dot{X} = \Omega + F(X, Y) \\ \dot{Y} = SY + G(X, Y) \end{cases} \tag{23}$$

avec $F = G = \partial G/\partial Y = 0$ lorsque $Y = 0$.

On se place également dans le cas où S est diagonalisable et même diagonalisée. On pose alors $S := \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i \frac{\partial}{\partial y_i}$, $\Lambda := (\lambda_1, ..., \lambda_n)$, par commodité on posera également $\lambda_0 = 0$. Alors :

$$L := \vec{\Omega} + S = \sum_{j=1}^{l} \Omega_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i \frac{\partial}{\partial y_i}$$

L est alors quasi-homogène de quasi-degré 0. On a alors dans ces coordonnées : $Z = L + R$, où R est un champ de vecteurs de quasi-ordre ≥ 1, à composantes dans $\mathcal{P}_X^0[[Y]]$.

8.1 Résonances et formes normales :

Soit $\hat{NF}$ un champ de vecteurs formel de la forme :

$$\hat{NF} = \sum_{j=1}^{l} (\Omega_j + \psi_j(X,Y)) \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} \left(\lambda_i y_i + \tilde{\psi}_i(X,Y)\right) \frac{\partial}{\partial y_i}$$

$$\text{où } \psi_j(X,Y) = \sum_{Q\in\mathbb{N}^n, |Q|\geq 1,\ P\in\mathbb{Z}^l} \psi_{j,PQ} \cdot e^{\mathbf{i}<P,X>} Y^Q$$

$$\text{et } \tilde{\psi}_i(X,Y) = \sum_{Q\in\mathbb{N}^n, |Q|\geq 2,\ P\in\mathbb{Z}^l} \tilde{\psi}_{i,PQ} \cdot e^{\mathbf{i}<P,X>} Y^Q$$

sont des séries formelles de $\mathcal{P}_X[[Y]]$. On dit que $\hat{NF}$ est une forme normale si pour tout i, j, P, Q :

$$\psi_{j,PQ} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{i} < P, \Omega > + < Q, \Lambda >= 0$$

$$\text{et } \tilde{\psi}_{i,PQ} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{i} < P, \Omega > + < Q, \Lambda > -\lambda_i = 0$$

Ces équations diophantiennes sur Ω et Λ sont les "résonances". On dit alors que le champ Z est "formellement normalisable" s'il existe un changement de coordonnées formel Φ tangent à l'identité tel que $\Phi^* Z$ est une forme normale.

8.2 Conditions :

Par commodité, on a posé $\lambda_0 = 0$.

Condition γ de Bruno : Pour tout $Q \in \mathbb{N}^n$ et pour tout $0 \leq i \leq n$ on définit :

$$\gamma_i(Q) := \liminf_{|P|\to+\infty,\ \mathbf{i}<P,\Omega>+<Q,\Lambda>-\lambda_i\neq 0} \frac{\ln|\mathbf{i} < P, \Omega > + < Q, \Lambda > -\lambda_i|}{|P|}$$

On suppose alors que pour tout $Q \in \mathbb{N}^n$ et pour tout $0 \leq i \leq n$, $\gamma_i(Q) \geq 0$.

Proposition 10. *L'hypothèse $\gamma_i(Q) \geq 0$, équivaut à :*

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists N_{\varepsilon,Q} \geq 0, \forall P \in \mathbb{Z}^l, |P| \geq N_{\varepsilon,Q},\ (\boldsymbol{i} < P, \Omega > + < Q, \Lambda > -\lambda_i) \neq 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{|\boldsymbol{i} < P, \Omega > + < Q, \Lambda > -\lambda_i|} \leq e^{\varepsilon|P|}$$

On notera $N_{\varepsilon,m} := \max_{m+1\leq|Q|\leq 2m} N_{\varepsilon,Q}$.

Restriction (Condition γ^*) : On suppose que pour tout $Q \in \mathbb{N}^n$, pour tout entier $m \in \mathbb{N}$ et pour tout $P \in \mathbb{Z}^l$ tel que $|P| > 2m$, on a :

$$\frac{1}{|\mathbf{i} < P, \Omega > + < Q, \Lambda > -\lambda_i|} \leq e^{\frac{1}{8}(1-m^{-1/m})|P|}$$

Autrement dit, dans la proposition 10, si $\varepsilon > \frac{1}{8}(1 - m^{-1/m})$, alors $N_{\varepsilon,Q} \leq 2m$.

Condition ω de Bruno : Pour tout $k \geq 0$, on pose :

$$\omega_k := \min_{P\in\mathbb{Z}^l, Q\in\mathbb{N}^n,} \left\{ |\mathbf{i} < P,\Omega > + < Q,\Lambda > -\lambda_i| \neq 0, \begin{array}{l} 0 \leq i \leq n \\ |Q| \leq 2^k + 1 \\ |P| \leq 2^k \end{array} \right\}$$

On suppose alors que :

$$\sum_{k\geq 0} \frac{\ln(\omega_k)}{2^k} > -\infty$$

Bruno, lui, définit les ω_k différemment. Dans [Bru89], ils sont définis comme suit :

$$\omega_k^* := \min_{P\in\mathbb{Z}^l, Q\in\mathbb{N}^n,} \left\{ |\mathbf{i} < P,\Omega > + < Q,\Lambda > -\lambda_i| \neq 0, \begin{array}{l} 0 \leq i \leq n \\ |Q| + |P| \leq 2^k + 1 \end{array} \right\}$$

Cependant, même avec une telle définition, la condition ω reste équivalente puisque, en effet, pour tout $k \geq 1$, on a :

$$\omega_k^* \geq \omega_{k+1} \geq \omega_{k+2}^*$$

Nous allons conserver notre définition pour les besoins de la démonstration.

Remarque : $\gamma^* \cap (\omega)$ est non vide car il contient les champs à composantes polynomiales en Q.

8.3 Linéarisation formelle

Proposition 11. *On considère le champs $Z = L + R$ défini précédemment, on suppose que la condition γ est vérifiée, et qu'il n'y a pas de résonance, i.e. pour tout $P \in \mathbb{Z}^l$, $Q \in \mathbb{N}^n$, et pour tout $0 \leq i \leq n$:*

$$\boldsymbol{i} < P,\Omega > + < Q,\Lambda > -\lambda_i \neq 0$$

Alors, le champ Z est formellement linéarisable.

Preuve : Soit $k \geq 1$. On suppose que le champ Z est déjà linéarisé au quasi-ordre k et on va montrer que l'on peut trouver un changement de variable ϕ_k tel que $\phi_k^* Z$ soit linéarisé jusqu'au quasi-ordre $k+1$.

On pose $Z = L + B_k + R_{K+1}$, où B_k est quasi-homogène de quasi-degré k et R_{k+1} est une perturbation de quasi-ordre supérieur à $k+1$. On cherche ϕ_k sous la forme $\exp(H_k)$, où H_k est quasi-homogène de quasi-degré k. On a alors :

$$\exp(H_k)^* Z = Z + [H_k, Z] + ... = L + B_k + [H_k, L] + ...$$

Ici "..." désigne des termes de quasi-ordre supérieur à $k+1$.

Pour linéariser le champ jusqu'au quasi-ordre $k+1$ il faut donc résoudre l'équation cohomologique :

$$[L, H_k] = B_k, \quad \text{où :}$$

$$B_k(X,Y) = \sum_{j=1}^{l}\left(\sum_{Q\in\mathbb{N}^n,|Q|=k}\ \sum_{P\in\mathbb{Z}^l} b_{j,PQ}\cdot e^{\mathbf{i}<P,X>}Y^Q\right)\frac{\partial}{\partial x_j}$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{Q\in\mathbb{N}^n,|Q|=k+1}\ \sum_{P\in\mathbb{Z}^l} \tilde{b}_{i,PQ}\cdot e^{\mathbf{i}<P,X>}Y^Q\right)\frac{\partial}{\partial y_i}$$

Or pour tout $1 \leq j \leq l$ et pour tout $1 \leq i \leq n$, on a :

$$\left[L, e^{\mathbf{i}<P,X>}Y^Q\frac{\partial}{\partial x_j}\right] = (\mathbf{i}<P,\Omega> + <Q,\Lambda>)\cdot e^{\mathbf{i}<P,X>}Y^Q\frac{\partial}{\partial x_j}, \quad \text{et}$$
$$\left[L, e^{\mathbf{i}<P,X>}Y^Q\frac{\partial}{\partial y_i}\right] = (\mathbf{i}<P,\Omega> + <Q,\Lambda> -\lambda_i)\cdot e^{\mathbf{i}<P,X>}Y^Q\frac{\partial}{\partial y_i}$$

On construit alors H_k de la façon suivante :

$$H_k(X,Y) = \sum_{j=1}^{l}\left(\sum_{Q\in\mathbb{N}^n,|Q|=k}\ \sum_{P\in\mathbb{Z}^l} h_{j,PQ}\cdot e^{\mathbf{i}<P,X>}Y^Q\right)\frac{\partial}{\partial x_j}$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{Q\in\mathbb{N}^n,|Q|=k+1}\ \sum_{P\in\mathbb{Z}^l} \tilde{h}_{i,PQ}\cdot e^{\mathbf{i}<P,X>}Y^Q\right)\frac{\partial}{\partial y_i}$$
$$\text{où}\quad h_{j,PQ} := \frac{1}{\mathbf{i}<P,\Omega> + <Q,\Lambda>}\cdot b_{j,PQ}$$
$$\text{et}\quad \tilde{h}_{i,PQ} := \frac{1}{\mathbf{i}<P,\Omega> + <Q,\Lambda> -\lambda_i}\cdot \tilde{b}_{i,PQ}$$

Le champ B_k est supposé analytique au voisinage du tore, donc d'après la proposition 8, et la condition γ de Bruno, pour tout $Q \in \mathbb{N}^n, |Q| = k$, tout $\varepsilon > 0$, et pour tout $1 \leq j \leq l, 1 \leq i \leq n$, il existe un entier $N_{\varepsilon ijQ}$ tel que pour tout $P \in \mathbb{Z}^l$ tel que si $|P| \geq N_{\varepsilon ijQ}$ on a :

$$\max\{|h_{j,PQ}|, |\tilde{h}_{i,PQ}|\} \ \leq\ e^{\varepsilon|P|}\cdot e^{-c|P|}$$

Pour assurer la convergence, on choisit $\varepsilon := \frac{c}{2}$. Comme il n'y a qu'un nombre fini de multi-indices Q impliqués dans l'équation homologique (ainsi que pour i et j), on peut alors poser :

$N := \max(N_{\frac{c}{2}ijQ})_{1\leq j\leq l, 1\leq i\leq n, |Q|=k}$. Ainsi la majoration précédente sera valable uniformément. On en déduit donc que le changement de variable ϕ_k est analytique au voisinage du tore, et linéarise le champ Z jusqu'à l'ordre $k+1$. On pose alors $\Psi_k = \phi_k \circ \Psi_{k-1}$, avec $\Psi_0 = Id$.

On réalise ainsi une transformation formelle, $\hat{\Psi} := \lim_{k\to+\infty}\Psi_k$ qui linéarise formellement le champ de vecteur Z.

8.4 Énoncé du théorème principal

Dans [Bru89], Bruno énonce un théorème sous les conditions γ et ω, en imposant également que le champ de vecteur soit normalisable sous une certaine forme.

Condition a de Bruno : Il existe une série formelle $\hat{a} \in \mathcal{P}_X[[Y]]$, tel que le champ (23) se normalise sous la forme :

$$\hat{NF} = \sum_{j=1}^{l} \psi_j(X,Y) \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} \tilde{\psi}_i(X,Y) \frac{\partial}{\partial y_i}$$

$$\text{avec} \quad \psi_j(X,Y) = \Omega_j \cdot \hat{a}(X,Y)$$

$$\text{et} \quad \tilde{\psi}_i(X,Y) = \lambda_i y_i \cdot \hat{a}(X,Y)$$

Ou encore $\hat{NF} = \hat{a}L$.

Bruno énonce alors le théorème suivant :

Théorème 6 (Bruno)**.** *Soit $Z = L + R$ un champ de vecteurs de la forme (23) analytique au voisinage du tore. On suppose que les conditions γ, ω et a sont vérifiées. Alors, Z est holomorphiquement normalisable au voisinage du tore.*

Il n'a cependant jamais publié sa démonstration. Ici, nous donnons une preuve d'un théorème de linéarisation sur le tore invariant, soit le cas non-résonnant et sous la condition γ^* :

Théorème 7 (Théorème de linéarisation au voisinnage du tore invariant)**.** *Soit $Z = L + R$ un champ de vecteurs de la forme (23) analytique au voisinage du tore. On suppose que :*

(i) *Les nombres Ω, Λ ne vérifient aucune condition de résonance.*
(i.e. $\forall (P,Q) \in \mathbb{N}^{l+n}, 0 \leq i \leq n,\ \boldsymbol{i} < P, \Omega > + < Q, \Lambda > - \lambda_i \neq 0.$)

(ii) *Les conditions γ^* et ω sont vérifiées.*

Alors, le champ Z est holomorphiquement conjugué à L au voisinage du tore.

9 Démonstration du théorème

9.1 Résumé de la preuve

Le cheminement et le schéma de la preuve s'inspirent de la démonstration de Laurent Stolovitch du théorème de normalisation complète [Sto]. On normalise quasi-degré par quasi-degré, en estimant le changement de coordonnées, puis grâce à un procédé d'itération on s'assure du contrôle de ces estimés à chaque étape, ainsi que de l'analyticité de la perturbation et du changement de coordonnées global.

La difficulté est que l'on manipule des polynômes, non plus à coefficients complexes mais à coefficients fonctionnels sur le Tore. Les résolutions et estimations doivent donc se faire sur des espaces de dimensions infinies. Cependant l'espace des fonctions analytique et 2π périodiques sur le tore est gradué par les fréquences $P \in \mathbb{Z}^l$.

L'idée est de tronquer cet espace en deux parties, les basses fréquences $|P| \leq 2^k$ et les hautes fréquences $|P| > 2^k$, puis de résoudre algébriquement sur l'espace des basses fréquences qui est de dimension finie, et enfin d'avoir un contrôle suffisamment fin de la partie qui correspond aux hautes fréquences.

Nous allons d'abord supposer que le champ est déjà linéarisé jusqu'au quasi-ordre m, et nous allons le normaliser jusqu'au quasi-ordre $2m$ grâce à un changement de variable de la forme $(Id+H)$, en gardant un contrôle de H, tant sur les basses fréquences que les hautes.

Ce contrôle de H va permettre d'établir un procédé d'itération, pour passer à une normalisation de quasi-ordre $2m$. On suppose que le champ $Z = L+R_{m+1}$ est déjà normalisé jusqu'à l'ordre m et on suppose que la perturbation R_{m+1} est analytique sur le polydisque $D(\delta, r)$; le procédé permettra d'établir une transformation Φ tel que $\Phi^* Z = L + R_{2m+1}$ soit linéarisé jusqu'au quasi-ordre $2m$, et tel que la perturbation R_{2m+1} soit analytique sur un polydisque $D(\Delta, R)$ qui contient l'image par Φ du polydisque initial.

Ce procédé constituera le point clé d'une démonstration par récurrence de la linéarisation analytique du champ initial.

Notons qu'il est nécessaire de distinguer les rayons δ et r pour la démonstration du contrôle de H ainsi que celle du procédé d'itération. Les passages aux rayons suivants Δ et R se feront en effet en deux temps. Une fois ces propriétés démontrées, il ne sera plus nécessaire de les distinguer et la dernière partie de la démonstration se fera sur des polydisques de la forme $(D(r_k, r_k))_{k\geq 0}$.

9.2 Équation cohomologique

On considère le champ de vecteur Z défini précédemment, et vérifiant les hypothèses du théorème 7. On suppose que Z est déjà linéarisé à l'ordre m. On pose donc $Z = L + B + R$ où B est un champ de vecteur analytique de quasi-ordre $m+1$ et de quasi-degré $2m$ (on note $\mathcal{P}_{l,n}^{m+1,2m}$ l'ensemble de ces champs), et R est une perturbation de quasi-ordre supérieur à $2m+1$.

De manière analogue à la proposition 11, on construit un difféomorphisme $\phi_m := \exp(H)$ qui linéarise le champ jusqu'à l'ordre $2m$, en résolvant l'équation cohomologique $[L, H] = B$, sur $\mathcal{P}_{l,n}^{m+1,2m}$.

En revanche, ici il n'est pas possible de se restreindre à une majoration sur des espaces de poids, car contrairement à la théorie classique des formes normales de champs de vecteurs, B n'est pas une simple somme de monômes, mais une somme de monômes en Y à coefficients fonctionnels en X. Comme B est alors une somme "infinie" de briques élémentaires de la forme $e^{\mathbf{i}<P,X>}Y^Q$, il n'est pas possible d'avoir une estimée classique.

Cependant, lorsque $|P|$ est grand, la condition γ de Bruno et les hypothèses d'analyticité sur B nous fournissent un contrôle de ces hautes fréquences.

On décompose alors l'espace $\mathcal{P}_{l,n}^{m+1,2m}$ en deux sous-espaces :

$$\mathcal{P}_{l,n}^{m+1,2m} = \mathcal{P}_0^{m+1,2m} \oplus \mathcal{P}_\infty^{m+1,2m}$$

où $\mathcal{P}_0^{m+1,2m}$ est l'ensemble des champs de vecteurs de $\mathcal{P}_{l,n}^{m+1,2m}$, dont les coefficients sont des combinaisons linéaires des fonctions $(e^{\mathbf{i}<P,X>}Y^Q)$ de X et Y, avec $|P| \leq 2m$.

De même $\mathcal{P}_\infty^{m+1,2m}$ est l'ensemble des champs de vecteurs de $\mathcal{P}_{l,n}^{m+1,2m}$, dont les coefficients sont des fonctionnelles à hautes fréquences, i.e. pour $|P| > 2m$.

Comme les briques élémentaires $e^{\mathbf{i}<P,X>}Y^Q$ sont des vecteurs propres pour l'opérateur $ad(L)$, ces deux sous-espaces sont stables par celui-ci. On résout donc l'équation cohomologique, séparément sur chaque espaces :

$$[L, H_0] = B_0 \text{ et } [L, H_\infty] = B_\infty$$

On remarque que $\mathcal{P}_0^{m+1,2m}$ est un espace vectoriel de dimension finie. Il se décompose donc en une somme finie d'espaces propres pour l'opérateur $ad(L)$:

$$\mathcal{P}_0^{m+1,2m} = \bigoplus_\alpha E_\alpha.$$

Ici les valeurs propres α sont des termes $(\mathbf{i} < P, \Omega > + < Q, \Lambda > -\lambda_i)$, avec $|P| \leq 2m$, $0 \leq i \leq n$, et $|Q| \leq 2m+1$.

9.3 Estimation de la solution

Lemme 4. *Il existe une constante K strictement positive et un nombre entier m_0 tels que pour tout $m = 2^k$ plus grand que m_0, les propriétés suivantes sont vérifiées :*

Soient $r > 0$, $\delta > 0$, $\theta > 0$ et $\Delta > 0$ tels que $1 > r > \frac{1}{2}$, $\delta > \frac{1}{2}$, $\delta > \theta > \Delta > 0$ et $\frac{\theta-\Delta}{2} > \frac{1}{8}(1 - m^{-1/m})$. Soit H une solutions de l'équation cohomologique $[L, H] = B$, sur l'espace $\mathcal{P}_{l,n}^{m+1,2m}$. On suppose que $|B|_{\delta,r} < 1$, alors on a :

(i) $|H|_{\Delta,r} \leq \frac{1}{\omega_{k+1}}|B_0|_{\Delta,r} + \frac{1}{\delta-\theta}Ke^{-2(\delta-\theta)m}$

(ii) $|dH|_{\Delta,r} \leq 2m\left(\frac{1}{r}+1\right)|H|_{\Delta,r} + \frac{1}{\delta-\theta}Ke^{-2(\delta-\theta)m}$

Preuve :

(i) : On décompose H selon les sous-espaces $\mathcal{P}_0^{m+1,2m}$ et $\mathcal{P}_\infty^{m+1,2m}$. On a donc $[L, H_0] = B_0$, et $[L, H_\infty] = B_\infty$. On décompose alors H_0 et B_0 en somme finie de vecteurs propres : $H_0 = \sum_\alpha H_{0,\alpha}$ et $B_0 = \sum_\alpha B_{0,\alpha}$, et on a : $[L, H_{0,\alpha}] = \alpha H_{0,\alpha} = B_{0,\alpha}$. Ainsi :

$$|H_0|_{\Delta,r} \leq \sum_\alpha |H_{0,\alpha}|_{\Delta,r} \leq \sum_\alpha \frac{1}{|\alpha|}|B_{0,\alpha}|_{\Delta,r} \leq \sum_\alpha \frac{1}{\omega_{k+1}}|B_{0,\alpha}|_{\Delta,r} \leq \frac{1}{\omega_{k+1}}|B_0|_{\Delta,r}$$

Pour estimer H_∞ on décompose B_∞ sous la forme :

$$B_\infty(X,Y) = \sum_{j=1}^{l}\left(\sum_{m+1\leq|Q|\leq 2m}\sum_{|P|>2m} b_{j,PQ}\cdot e^{\mathbf{i}<P,X>}Y^Q\right)\frac{\partial}{\partial x_j}$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{m+2\leq|Q|\leq 2m+1}\sum_{|P|>2m} \tilde{b}_{i,PQ}\cdot e^{\mathbf{i}<P,X>}Y^Q\right)\frac{\partial}{\partial y_i}$$

On fait de même avec H_∞ en nommant ses coefficients $(h_{j,PQ},\tilde{h}_{i,PQ})$. On a alors :

$$h_{j,PQ} := \frac{1}{\mathbf{i}<P,\Omega>+<Q,\Lambda>}\cdot b_{j,PQ},\quad \text{et}$$

$$\tilde{h}_{i,PQ} := \frac{1}{\mathbf{i}<P,\Omega>+<Q,\Lambda>-\lambda_i}\cdot \tilde{b}_{i,PQ}$$

Or par hypothèse $|B_\infty|_{\delta,r}<1$, donc d'après la remarque de la proposition 8 les coefficients $(b_{j,PQ},\tilde{b}_{i,PQ})$ sont tous majorés par $e^{-\delta|P|}$. De plus d'après la proposition 10, pour tout $0\leq i\leq n$ on a :

$$\frac{1}{|\mathbf{i}<P,\Omega>+<Q,\Lambda>-\lambda_i|}\leq e^{\varepsilon|P|},\quad \text{lorsque } |P|\geq N_{\varepsilon,m}$$

Ici on choisit $\varepsilon=\frac{\theta-\Delta}{2}$. Par hypothèse et d'après la restriction γ^*, on a : $N_{\frac{\theta-\Delta}{2},m}\leq 2m$.

Ainsi :

$$\max_{1\leq j\leq l,\ 1\leq i\leq n}(|h_{j,PQ}|,|\tilde{h}_{i,PQ}|)\leq e^{\frac{\theta-\Delta}{2}|P|}\cdot e^{-\delta|P|}$$

Alors :

$$|H_\infty|_{\Delta,r}\leq \sum_{m+1\leq|Q|\leq 2m+1}\left(\sum_{|P|>2m}\left(e^{\frac{\theta-\Delta}{2}|P|}\cdot e^{-\delta|P|}\right)\cdot e^{\Delta|P|}\right)\cdot r^{|Q|}$$

$$\leq\left(\sum_{|P|>2m} e^{-(\delta-\frac{\theta+\Delta}{2})|P|}\right)\cdot\left(\sum_{Q\in\mathbb{N}^n} r^{|Q|}\right)$$

Comme $1/2<r<1$, le second facteur converge et ne dépend pas de m, notons le K. Quant au premier facteur :

$$\sum_{|P|>2m} e^{-(\delta-\frac{\theta+\Delta}{2})|P|}=\sum_{\sigma>2m}\sum_{|P|=\sigma} e^{-(\delta-\frac{\theta+\Delta}{2})\sigma}=\sum_{\sigma>2m} a(\sigma)e^{-(\delta-\frac{\theta+\Delta}{2})\sigma}$$

où $a(\sigma)$ désigne le nombre de solutions à l'équation :

$$|p_1|+|p_2|+...+|p_l|=\sigma,\quad (p_1,p_2,...,p_l)\in\mathbb{Z}^l,\ \text{avec } \sigma\in\mathbb{N}$$

Il vient naturellement, $a(\sigma)\leq(2\sigma+1)^l$. Par conséquent :

$$\sum_{|P|>2m} e^{-(\delta-\frac{\theta+\Delta}{2})|P|}\leq\sum_{\sigma>2m}(2\sigma+1)^l e^{-(\delta-\frac{\theta+\Delta}{2})\sigma}$$

Or :

$$\lim_{\sigma\to+\infty} e^{(\delta-\theta)\sigma}\cdot(2\sigma+1)^l e^{-(\delta-\frac{\theta+\Delta}{2})\sigma}=0$$

Donc pour m assez grand, on a :

$$\sum_{\sigma>2m}(2\sigma+1)^l e^{-(\delta-\frac{\theta+\Delta}{2})\sigma}\le\sum_{\sigma>2m}e^{-(\delta-\theta)\sigma}=\frac{1}{e^{(\delta-\theta)}-1}e^{-2(\delta-\theta)m}$$

$$\le\frac{1}{\delta-\theta}e^{-2(\delta-\theta)m}$$

Ce qui achève la preuve de (i).

(ii) : Soit h une des composantes fonctionnelles de H. On écrit alors :

$$h(X,Y)=\sum_{m+1\le|Q|\le 2m}\sum_{P\in\mathbb{Z}^l}h_{PQ}\cdot e^{\mathbf{i}<P,X>}Y^Q$$

Pour tout $1\le i\le n$, on a donc :

$$\left|\frac{\partial h}{\partial y_i}\right|_{\Delta,r}=\left|\sum_{m+1\le|Q|\le 2m}\sum_{P\in\mathbb{Z}^l}h_{PQ}\cdot q_i e^{\mathbf{i}<P,X>}Y^{Q-E_i}\right|_{\Delta,r}$$

$$=\sum_{m+1\le|Q|\le 2m}\sum_{P\in\mathbb{Z}^l}|h_{PQ}|\cdot q_i e^{\Delta|P|}r^{|Q|-1}\le\frac{2m}{r}|H|_{\Delta,r}$$

On décompose à présent h pour à nouveau estimer séparément les basses fréquences et les hautes fréquences, en écrivant $h=h_0+h_\infty$, avec :

$$h_0(X,Y)=\sum_{m+1\le|Q|\le 2m}\sum_{|P|\le 2m}h_{PQ}\cdot e^{\mathbf{i}<P,X>}Y^Q,\quad\text{et}$$

$$h_\infty(X,Y)=\sum_{m+1\le|Q|\le 2m}\sum_{|P|>2m}h_{PQ}\cdot e^{\mathbf{i}<P,X>}Y^Q$$

On a alors pour tout $1\le j\le l$:

$$\left|\frac{\partial h_0}{\partial x_j}\right|_{\Delta,r}=\left|\sum_{m+1\le|Q|\le 2m}\sum_{|P|\le 2m}h_{PQ}\cdot\mathbf{i}p_j e^{\mathbf{i}<P,X>}Y^Q\right|_{\Delta,r}$$

$$=\sum_{m+1\le|Q|\le 2m}\sum_{|P|\le 2m}|h_{PQ}|\cdot p_j e^{\Delta|P|}r^{|Q|}\le 2m|H|_{\Delta,r}$$

De plus :

$$\left|\frac{\partial h_\infty}{\partial x_j}\right|_{\Delta,r}=\sum_{m+1\le|Q|\le 2m}\sum_{|P|>2m}|h_{PQ}|\cdot p_j e^{\Delta|P|}r^{|Q|}$$

Or, on a prouvé précédemment que pour $|P|>2m$:

$$|h_{PQ}|\le e^{\frac{\theta-\Delta}{2}|P|}\cdot e^{-\delta|P|}$$

On a donc :

$$\left|\frac{\partial h_\infty}{\partial x_j}\right|_{\Delta,r} \leq \left(\sum_{|P|>2m} p_j e^{-(\delta-\frac{\theta+\Delta}{2})|P|}\right)\cdot\left(\sum_{Q\in\mathbb{N}^n} r^{|Q|}\right)$$
$$\leq K\cdot \sum_{|P|>2m} |P| e^{-(\delta-\frac{\theta+\Delta}{2})|P|}$$

Comme précédemment on a :

$$\sum_{|P|>2m} |P| e^{-(\delta-\frac{\theta+\Delta}{2})|P|} = \sum_{\sigma>2m}\sum_{|P|=\sigma} \sigma e^{-(\delta-\frac{\theta+\Delta}{2})\sigma} \leq \sum_{\sigma>2m} (2\sigma+1)^l \sigma e^{-(\delta-\frac{\theta+\Delta}{2})\sigma}$$

Or :

$$\lim_{\sigma\to+\infty} e^{(\delta-\theta)\sigma}\cdot(2\sigma+1)^l\sigma e^{-(\delta-\frac{\theta+\Delta}{2})\sigma} = 0$$

Donc pour m assez grand, on a :

$$\sum_{\sigma>2m} (2\sigma+1)^l \sigma e^{-(\delta-\frac{\theta+\Delta}{2})\sigma} \leq \sum_{\sigma>2m} e^{-(\delta-\theta)\sigma} \leq \frac{1}{\delta-\theta} e^{-2(\delta-\theta)m}$$

Ceci achève la démonstration du lemme.

9.4 Procédé d'itération

Soit $m = 2^k$, $\delta > \frac{1}{2}$ et $1 > r > \frac{1}{2}$. On note $\mathcal{B}_m(\delta, r)$, l'ensemble des champs de vecteurs R, analytiques au voisinage du tore et de quasi-ordre supérieur ou égal à m, et tel que $|R|_{\delta,r} < 1$. On définit :

$$\rho = m^{-1/m} r, \quad R = \gamma_k m^{-2/m} r \quad \text{ et } \quad \theta = m^{-1/m}\delta, \ \Delta = \gamma_k m^{-2/m}\delta$$
$$\text{où } \ \gamma_k = \left(\frac{1}{\omega_{k+1}}\right)^{-1/m}$$

Proposition 12. *Il existe un entier m_1(indépendant de δ et r) tel que pour tout $m \geq m_1$, on a les propriétés suivantes :*

On suppose que $Z = L + R_{m+1}$ est linéarisé jusqu'au quasi-ordre m, et que $R_{m+1} \in \mathcal{B}_{m+1}(\delta, r)$. Il existe $H \in \mathcal{P}_{l,n}^{m+1,2m}$, tel que :

(i) *$\Phi := (Id + H)^{-1}$ soit un difféomorphisme tel que $D_{\Delta,r} \subset \Phi(D_{\theta,\rho})$*

(ii) *$\Phi_* Z = L + R_{2m+1}$ est linéarisé jusqu'au quasi-ordre $2m$.*

(iii) *$R_{2m+1} \in \mathcal{B}_{2m+1}(\Delta, R)$.*

Remarque : Avec les définitions de δ, θ, Δ précédentes, on a :

$$\delta - \theta = \delta(1 - m^{-1/m}) \sim \delta \ln(m)/m$$

Et on a même :

$$\exp(-2(\delta-\theta)m) \sim \exp(-2\delta\ln(m))$$

En effet :

$$\frac{\exp(-2(\delta-\theta)m)}{\exp(-2\delta\ln(m))} = \exp\left(-2\delta\ln(m)\left(\frac{(\delta-\theta)m}{\delta\ln(m)} - 1\right)\right)$$

$$= \exp\left(-2\delta\ln(m)\left(\frac{(1-m^{-1/m})m}{\ln(m)}-1\right)\right)$$

Or

$$(1-m^{-1/m}) = \frac{\ln(m)}{m} - \frac{1}{2}(\frac{\ln(m)}{m})^2 + o\left(\left(\frac{\ln(m)}{m}\right)^2\right)$$

Donc

$$\frac{(1-m^{-1/m})m}{\ln(m)} = 1 - \frac{1}{2}\frac{\ln(m)}{m} + o\left(\frac{\ln(m)}{m}\right)$$

Ainsi

$$\frac{\exp(-2(\delta-\theta)m)}{\exp(-2\delta\ln(m))} = \exp\left(\delta\frac{\ln(m)^2}{m} + o\left(\frac{\ln(m)^2}{m}\right)\right) \longrightarrow 1$$

D'où l'équivalence. On en déduit alors que :

$$\frac{1}{\delta-\theta}e^{-2(\delta-\theta)m} \sim \frac{1}{\delta\ln(m)}m^{1-2\delta}$$

Et comme $\delta > 1/2$, ceci tend vers 0, donc pour m assez grand on a :

$$\frac{1}{\delta-\theta}e^{-2(\delta-\theta)m} \leq \frac{1}{K}$$

Preuve :

(ii) : On note B la troncature au quasi-degré $2m$ de la perturbation R_{m+1}. On trouve $H \in \mathcal{P}_{l,n}^{m+1,2m}$ en résolvant l'équation cohomologique $[L,H] = B$ et par un raisonnement analogue à la proposition 11, on montre que d'après la condition γ de Bruno, H est analytique au voisinage du tore.

De plus, par hypothèse $R_{m+1} \in \mathcal{B}_{m+1}(\delta, r)$ ce qui implique que $|B|_{\delta,r} < 1$. On remarque également que :

$$\frac{\theta-\Delta}{2} = \frac{\theta}{2}(1-\gamma_k m^{-1/m}) \geq \frac{\theta}{2}(1-m^{-1/m})$$

Or $\theta = \delta m^{-1/m}$, et $\delta > 1/2$. Comme $\lim_{m\to+\infty} m^{-1/m} = 1$, pour m assez grand, on a bien $\frac{\theta-\Delta}{2} > \frac{1}{8}(1-m^{-1/m})$.

On peut donc appliquer le lemme 4 et la proposition 9 :

$$\begin{aligned}|H|_{\Delta,R} &\leq \left(\frac{R}{r}\right)^{m+1}|H|_{\Delta,r} \leq \left(\frac{R}{r}\right)^{m+1}\cdot\left(\frac{1}{\omega_{k+1}}+\frac{1}{\delta-\theta}Ke^{-2(\delta-\theta)m}\right)\\ &\leq \left(\gamma_k m^{-2/m}\right)^{m+1}\cdot\left(\gamma_k^{-m}+\frac{1}{\delta-\theta}Ke^{-2(\delta-\theta)m}\right)\\ &\leq \gamma_k m^{-2-2/m}\left(1+\gamma_k^m\cdot\frac{1}{\delta-\theta}Ke^{-2(\delta-\theta)m}\right)\end{aligned}$$

Et d'après la remarque on obtient donc :

$$|H|_{\Delta,R} \leq 2m^{-2-2/m} \tag{24}$$

Pour le point (i), il faut montrer que pour tout $(x,y) \in D_{\Delta,R}$, on a bien $\Phi^{-1}(x,y) \in D_{\theta,\rho}$. Pour cela, il suffit de montrer que :

$$\Delta + |H|_{\Delta,R} < \theta \quad \text{et} \quad R + |H|_{\Delta,R} < \rho.$$

Or, $\Delta = \gamma_k m^{-2/m}\delta \le m^{-2/m}\delta$, donc d'après l'estimation (24) il suffit de montrer que :
$m^{-2/m}(\delta + 2m^{-2}) < \theta = m^{-1/m}\delta$, soit $\frac{2m^{-2}}{m^{1/m}-1} < \delta$. Or :

$$\frac{2m^{-2}}{m^{1/m}-1} = \frac{2m^{-2}}{\exp(\ln(m)/m)-1} \le \frac{2m^{-2}}{\ln(m)/m} \le \frac{2}{m\ln(m)}$$

car $\forall t \in \mathbb{R}^+, 1+t \le \exp(t)$. Et lorsque t est suffisamment grand : $4 < t\ln(t)$, et comme $\delta > 1/2$, on obtient : $\frac{2m^{-2}}{m^{1/m}-1} < 1/2 < \delta$. Ainsi on a montré que : $\Delta + |H|_{\Delta,R} < \theta$, et par un raisonnement strictement analogue on montre également que $R + |H|_{\Delta,R} < \rho$.

Pour démontrer le point (iii), on pose :

$$Z = L + R_{m+1}, \quad \text{et} \quad \Phi_* Z = L + R_{2m+1}$$

Par hypothèse $|R_{m+1}|_{\delta,r} < 1$ et on cherche à montrer que $|R_{2m+1}|_{\Delta,R} < 1$. Écrivons :

$$\begin{aligned} R_{2m+1}(x,y) &= \Phi_* Z(x,y) - L(x,y) \\ &= d_{\Phi^{-1}(x,y)}\Phi(Z \circ \Phi^{-1}(x,y)) - L(x,y) \\ &= d_{\Phi^{-1}(x,y)}\Phi(L(\Phi^{-1}(x,y)) + R_{m+1}(\Phi^{-1}(x,y))) - L(x,y) \\ &= d_{\Phi^{-1}(x,y)}\Phi\left(L(\Phi^{-1}(x,y)) + R_{m+1}(\Phi^{-1}(x,y)) - (d_{\Phi^{-1}(x,y)}\Phi)^{-1}L(x,y)\right) \end{aligned}$$

Or $(d_{\Phi^{-1}(x,y)}\Phi)^{-1} = d_{(x,y)}\Phi^{-1} = d_{(x,y)}(Id + H) = Id + d_{(x,y)}H$. Donc

$$R_{2m+1}(x,y) = d_{\Phi^{-1}(x,y)}\Phi \begin{pmatrix} L(\Phi^{-1}(x,y)) - L(x,y) \\ +R_{m+1}(\Phi^{-1}(x,y)) - d_{(x,y)}H(L(x,y)) \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$R_{2m+1}(x,y) = \begin{pmatrix} L(\Phi^{-1}(x,y)) - L(x,y) \\ +R_{m+1}(\Phi^{-1}(x,y)) - d_{(x,y)}H(L(x,y) + R_{2m+1}(x,y)) \end{pmatrix}$$

Or

$$L(\Phi^{-1}(x,y)) - L(x,y) = \underbrace{\vec{\Omega}(\Phi^{-1}(x,y)) - \vec{\Omega}(x,y)}_{=0} + S(\Phi^{-1}(x,y)) - S(x,y)$$

Donc $L(\Phi^{-1}(x,y)) - L(x,y) = S(H(x,y))$. On obtient alors :

$$(Id + d_{(x,y)}H)(R_{2m+1}(x,y)) = S(H(x,y)) - d_{(x,y)}H(L(x,y)) + R_{m+1}(\Phi^{-1}(x,y))$$

Nous allons utiliser cette équations en analysant chacun des termes pour parvenir à estimer $|R_{2m+1}(x,y)|_{\Delta,R}$.

Tout d'abord on a $S = dS = dL$, donc $S(H(x,y)) - d_{(x,y)}H(L(x,y)) = [L,H] = B$. Et :

$$|B|_{\Delta,R} \le |B|_{\delta,R} \le \left(\frac{R}{r}\right)^{m+1} |B|_{\delta,r} \le \left(\frac{\omega_{k+1}}{cm^2}\right) \tag{25}$$

où c est une constante.

De plus comme $\Phi^{-1}(D_{\Delta,R}) \subset D_{\theta,\rho}$, on a :

$$|R_{m+1}(\Phi^{-1}(x,y))|_{\Delta,R} \leq |R_{m+1}(x,y)|_{\theta,\rho}$$

Par conséquent :

$$|R_{m+1}(\Phi^{-1}(x,y))|_{\Delta,R} \leq |R_{m+1}(x,y)|_{\delta,\rho} \leq \left(\frac{\rho}{r}\right)^m |R_{m+1}(x,y)|_{\delta,r} \leq \frac{1}{m} \tag{26}$$

Ensuite, d'après le lemme, on a :

$$|dH|_{\Delta,R} \leq 2m\left(\frac{1}{R}+1\right)|H|_{\Delta,R} + \frac{1}{\delta-\theta}Ke^{-2(\delta-\theta)m}$$

on en déduit alors, grâce à l'inégalité triangulaire inversée :

$$|(Id+d_{(x,y)}H)(R_{2m+1}(x,y))|_{\Delta,R} \geq |R_{2m+1}(x,y)|_{\Delta,R} - |d_{(x,y)}H(R_{2m+1}(x,y))|_{\Delta,R}$$

$$\geq |R_{2m+1}(x,y)|_{\Delta,R} \cdot \left(1-(l+n)\left(2m\left(\frac{1}{R}+1\right)|H|_{\Delta,r} + \frac{1}{\delta-\theta}Ke^{-2(\delta-\theta)m}\right)\right)$$

Or d'après la remarque $\frac{1}{\delta-\theta}Ke^{-2(\delta-\theta)m}$ tend vers 0 lorsque m tend vers l'infini. Ainsi d'après les inégalités (24), (25) et (26) on a :

$$|R_{2m+1}(x,y)|_{\Delta,R} \leq \frac{\frac{\omega_{k+1}}{cm^2}+\frac{1}{m}}{\left(1-(l+n)\left(2m\left(\frac{1}{R}+1\right)2m^{-2-2/m}+\frac{1}{\delta-\theta}Ke^{-2(\delta-\theta)m}\right)\right)}$$

$$\sim \frac{1}{m}$$

Donc pour m assez grand, on a bien $R_{2m+1} \in \mathcal{B}_{2m+1}(\Delta, R)$

9.5 Convergence du difféomorphisme limite

Ici nous arrivons à la fin de la preuve. Le procédé d'itération étant démontré, il n'est plus nécessaire de distinguer le rayon r et la largeur de bande δ. On prendra alors $\delta = r$.

Soit $1 > r > 1/2$ un réel. On considère la suite $(r_k)_{k\geq 0}$ définie comme suit :

$$r_0 = r, \text{ et } r_{k+1} = \gamma_k m^{-2/m} r_k, \text{ où } m = 2^k$$

Lemme 5. *La suite $(r_k)_{k\geq 0}$ converge et il existe un entier m_2 tel que pour tout $k \geq m_2, r_k > \frac{r_{m_2}}{2}$.*

Preuve : On a $r_{k+1} = r\prod_{i=1}^k \gamma_i (2^i)^{-2^{1-i}}$, où $\gamma_i = \left(\frac{1}{\omega_{i+1}}\right)^{-1/2^i}$. Donc :

$$\ln(r_{k+1}) = \ln(r) + \sum_{i=1}^k \ln(\gamma_i) + \sum_{i=1}^k \ln((2^i)^{-2^{1-i}})$$

$$= \ln(r) + \sum_{i=1}^k \frac{\ln(\omega_{i+1})}{2^i} - \ln(2)\sum_{i=1}^k \frac{i}{2^i}$$

Ainsi la suite $(r_k)_{k\geq 0}$ converge d'après la condition ω de Bruno. On note r_∞ sa limite. Il existe m_2 tel que $\frac{r_\infty}{r\times r_{m_2}} > 1/2$, car si pour tout $k \geq 0$, $\frac{r_\infty}{r\times r_k} \leq 1/2$, alors :

$$r_k \geq \frac{2r_\infty}{r} \geq 2r_\infty > r_\infty$$

Ce qui contredirait le fait que (r_k) converge vers r_∞. Il existe donc m_2 tel que :

$$\prod_{i=m_2+1}^{+\infty} \gamma_i(2^i)^{-2^{1-i}} > 1/2$$

Ainsi pour tout $k \geq m_2$, on a :

$$r_k = r_{m_2} \prod_{i=m_2+1}^{k} \gamma_i(2^i)^{-2^{1-i}} \geq r_{m_2} \prod_{i=m_2+1}^{+\infty} \gamma_i(2^i)^{-2^{1-i}} > \frac{r_{m_2}}{2}.$$

Revenons à la démonstration du théorème. On suppose que le champ Z est holomorphe sur $D_{r,r}$. Soit $m_3 := \max(m_0, m_1, m_2)$, où m_0 est l'entier défini au lemme 4, m_1 est l'entier défini à la proposition 12, et m_2 celui défini au lemme 5. On définit aussi k_0 tel que $2^{k_0-1}+1 \leq m_3 \leq 2^{k_0}$.

Par un changement de coordonnées holomorphes on peut linéariser le champ Z jusqu'à l'ordre m_3, et de même, on peut supposer que la perturbation $R_{2^{k_0}+1}$ appartient à $\mathcal{B}_{2^{k_0}+1}(r,r)$. On construit alors la suite (r_k) comme précédemment avec $r_{k_0} = r$. par conséquent, pour tout entier $k \geq k_0$, on a $1/2 < r_k < 1$.

Montrons par récurrence sur k qu'il existe un difféomorphisme Ψ_k tel que $\Psi_{k*}(L+R_{2^{k_0}+1}) = L+R_{2^{k+1}+1}$ soit linéarisé jusqu'à l'ordre 2^{k+1}, avec $R_{2^{k+1}+1} \in \mathcal{B}_{2^{k+1}+1}(r_{k+1}, r_{k+1})$ et tel que :

$$|Id - \Psi_k^{-1}|_{r_{k+1},r_{k+1}} \leq \sum_{p=k_0}^{k} \frac{1}{2^p}.$$

Pour $k = k_0$, d'après la proposition 12, il existe Φ_{k_0} tel que $\Phi_{k_0*}(L + R_{2^{k_0}+1}) = L + R_{2^{k_0+1}+1}$ soit linéarisé jusqu'à l'ordre 2^{k_0+1}, où $R_{2^{k_0+1}+1}$ appartient à $\mathcal{B}_{2^{k_0+1}+1}(r_{k_0+1}, r_{k_0+1})$. On pose alors $\Psi_{k_0} = \Phi_{k_0}$ et on a $|Id - \Psi_{k_0}^{-1}|_{r_{k_0+1},r_{k_0+1}} \leq \frac{1}{2^{k_0}}$ d'après l'équation (24).

On suppose que la propriété est vraie pour tout $k-1$. Par hypothèse on a donc $\Psi_{k-1*}(L + R_{2^{k_0}+1}) = L + R_{2^k+1}$ linéarisé jusqu'à l'ordre 2^k et $R_{2^k+1} \in \mathcal{B}_{2^k+1}(r_k, r_k)$. Comme $1/2 < r_k < 1$, on peut alors appliquer la proposition 12 : il existe Φ_k tel que $(\Phi_k \circ \Psi_{k-1})_*(L + R_{2^{k_0}+1}) = L + R_{2^{k+1}+1}$ soit linéarisé jusqu'à l'ordre 2^{k+1}, avec $R_{2^{k+1}+1} \in \mathcal{B}_{2^{k+1}+1}(r_{k+1}, r_{k+1})$. On pose alors $\Psi_k := \Phi_k \circ \Psi_{k-1}$. D'après l'estimation (24), on a $|Id - \Phi_k^{-1}|_{r_{k+1},r_{k+1}} \leq \frac{1}{2^k}$. On a alors :

$$\begin{aligned}|Id - \Psi_k^{-1}|_{r_{k+1},r_{k+1}} &= |(Id - \Psi_{k-1}^{-1}) \circ \Phi_k^{-1} + (Id - \Phi_k^{-1})|_{r_{k+1},r_{k+1}} \\ &\leq |(Id - \Psi_{k-1}^{-1}) \circ \Phi_k^{-1}|_{r_{k+1},r_{k+1}} + |(Id - \Phi_k^{-1})|_{r_{k+1},r_{k+1}}\end{aligned}$$

Or d'après la proposition 12, $\Phi_k^{-1}(D_{r_{k+1},r_{k+1}}) \subset D_{r_k,r_k}$. On obtient alors :

$$|Id - \Psi_k^{-1}|_{r_{k+1},r_{k+1}} \leq |Id - \Psi_{k-1}^{-1}|_{r_k,r_k} + |Id - \Phi_k^{-1}|_{r_{k+1},r_{k+1}} \leq \sum_{p=k_0}^{k-1} \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^k}$$

Ce qui prouve la récurrence.

Comme $D_{1/2,1/2} \subset D_{r_k,r_k}$ pour tout $k \geq k_0$, la suite $(|Id - \Psi_k^{-1}|_{1/2,1/2})_{k \geq k_0}$ est donc bornée. Or la suite $(\Psi_k)_{k \geq k_0}$ converge coefficient par coefficient vers un difféomorphisme Ψ qui linéarise Z et qui par continuité de la norme vérifie $|Id - \Psi^{-1}|_{1/2,1/2} < +\infty$. Par conséquent Ψ est holomorphe au voisinage du tore. Z est donc holomorphiquement linéarisable au voisinage du tore.

Conlusion et perspectives

Les formes normales constituent un élément fondamental dans la compréhension des systèmes dynamiques. Elles fournissent une classification des perturbations, et mettent en lumière la caractérisation de la dynamique par les invariants.

Nous venons de voir en détail une démonstration de linéarisation dans un cadre plus complexe que la théorie classique. Pour prouver la convergence du difféomorphisme limite il a fallu faire face à la difficulté que présentait la dimension infinie des espaces de fonctions $\mathcal{P}_{l,n}^{m+1,2m}$.

Nous nous sommes cependant restreints à une situation sans résonance. La difficulté supplémentaire qu'ajouteraient des résonances est similaire à celle que l'on rencontre dans la théorie classique de normalisation des champs de vecteurs holomorphes, de plus, on a compris que le contrôle des hautes fréquences facilite l'estimation des solutions des équations cohomologiques ; on peut donc imaginer qu'une preuve du théorème de Bruno puisse être établie avec un schéma de preuve similaire.

Références

[Arn80] V. Arnold. *Chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles ordinaires.* "Mir", Moscow, 1980. Translated from the Russian by Djilali Embarek.

[Bam08] D. Bambusi. A Birkhoff normal form theorem for some semilinear PDEs. In *Hamiltonian dynamical systems and applications*, NATO Sci. Peace Secur. Ser. B Phys. Biophys., pages 213–247. Springer, Dordrecht, 2008.

[Brj71] A. D. Brjuno. Analytic form of differential equations. I, II. *Trudy Moskov. Mat. Obšč.*, 25 :119–262 ; ibid. 26 (1972), 199–239, 1971.

[Bru89] Alexander D. Bruno. *Local methods in nonlinear differential equations.* Springer Series in Soviet Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1989. Part I. The local method of nonlinear analysis of differential equations. Part II. The sets of analyticity of a normalizing transformation, Translated from the Russian by William Hovingh and Courtney S. Coleman, With an introduction by Stephen Wiggins.

[Cha83] Marc Chaperon. Quelques outils de la théorie des actions différentiables. 107 :259–275, 1983.

[Cha86] Marc Chaperon. Géométrie différentielle et singularités de systèmes dynamiques. *Astérisque*, (138-139) :440, 1986.

[Cha99] Marc Chaperon. A remark on Liouville vector fields and a theorem of Manouchehri. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 19(4) :895–899, 1999.

[Dar75] Lak Dara. Singularités génériques des équations différentielles multiformes. *Bol. Soc. Brasil. Mat.*, 6(2) :95–128, 1975.

[Dav85] A. A. Davydov. The normal form of a differential equation, that is not solved with respect to the derivative, in the neighborhood of its singular point. *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 19(2) :1–10, 96, 1985.

[Eke12] Ivar Ekeland. Discussion personnelle. Novembre 2012.

[HY12] Xuanji Hou and Jiangong You. Almost reducibility and non-perturbative reducibility of quasi-periodic linear systems. *Invent. Math.*, 190(1) :209–260, 2012.

[Man96] M. Manouchehri. Formes normales d'équations différentielles implicites et de champs de Liouville. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 16(4) :779–789, 1996.

[MR83] Jean Martinet and Jean-Pierre Ramis. Classification analytique des équations différentielles non linéaires résonnantes du premier ordre. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 16(4) :571–621 (1984), 1983.

[Sie42] Carl Ludwig Siegel. Iteration of analytic functions. *Ann. of Math. (2)*, 43 :607–612, 1942.

[Ste57] Shlomo Sternberg. Local contractions and a theorem of Poincaré. *Amer. J. Math.*, 79 :809–824, 1957.

[Ste58] Shlomo Sternberg. On the structure of local homeomorphisms of euclidean n-space. II. *Amer. J. Math.*, 80 :623–631, 1958.

[Sto] Laurent Stolovitch. Normal form of holomorphic dynamical systems.

[Sto96] Laurent Stolovitch. Classification analytique de champs de vecteurs 1-résonnants de $(\mathbf{C}^n, 0)$. *Asymptotic Anal.*, 12(2) :91–143, 1996.

[Tak74] Floris Takens. Singularities of vector fields. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (43) :47–100, 1974.

[Tho72] R. Thom. Sur les équations différentielles multiformes et leurs intégrales singulières. *Bol. Soc. Brasil. Mat.*, 3(1) :1–11, 1972.

[Vey79] Jacques Vey. Algèbres commutatives de champs de vecteurs isochores. *Bull. Soc. Math. France*, 107(4) :423–432, 1979.